序　言

本书是根据近几年来在南京大学数学天文系讲授天体力学課程时所編写的讲义修訂而成的。在1957年完成了該讲义的初稿，1959年作了重大修改，最近又作了第三次修改，使它更能符合目前国内的需要。

本书主要讲述天体力学的最基本的內容，涉及的面包括天体力学的所有各个部門。对天体力学工作者来說，这只能算是一本入門性的书，可以帮助讀者为进一步学习天体力学方面的专門知識打下基础。

本书的第一章对有关的一些基础知識作了回顧。在第二章和第三章中，对天体力学中最基本而又最实用的二体問題作了比較彻底的讲述；第四、第五章对于古天体力学主要部分的攝动理論作了介紹，但只限于讲它的基本概念，初步公式和研究方法，以及重要的研究結果。关于攝动理論的內容，以后将編写专門的书籍。在第七章中讲述了自轉理論的一些主要結果，內容以地球的自轉为主，这是因为地球自轉理論，特别是岁差和章动理論，有很大的实用价值，而且与天文学其它各分支都有密切关系。在第八章中讲了天体形状的一些最基本的理論和結果，仍以地球的形状和內部結构为主。天体形状和自轉理論是天体力学很重要的一个分支，关于这方面的內容很多，本书作为基础課教材，只能讲述这些，有些結果未加以推导，讀者如需詳細了解，可参考引出的书籍和文献。

人造地球卫星上天以后，月球的地位日益重要。作为天体力

学基础課教材，也必須讲月球的运动理論，因此比原来的讲义增加了一章，即第六章，主要讲現在所采用的研究月球运动的方法，也由于这方面的內容很多，在这里只能讲方法的輪廓和主要結果。

从內容上来看，要求閱讀本书的讀者，能具有数学分析、微分方程、复变函数和理論力学的基本知識，并能了解天文学的概況，熟悉球面天文学的基本概念和公式，最好能先讀我校編著的《天文学教程》。但如果讀者已掌握上面所談的知識，也可以直接閱讀本书，因本书还是按照較完整的系統編著的。

編写天体力学方面的书，在国内还是第一次，由于缺乏經驗，在內容选擇和章节的安排上一定有不少問題，希望讀者提出批評，以便再版时修訂补充。

在本书的編写过程中，赵却民教授曾参加第三章編写工作，黃天衣同志参加了第四章編写工作，孙义燧同志参加了修改工作，另外，高仍清、徐誠浩、曹振中、楼金虎、顾继明等同志参加了校对工作。

易 照 华

1961年5月于南京大学

目　　录

緒　論

§1 天体力学的定义和内容

天体力学是研究天体的运动和形状的科学。

天体的运动分为两个方面：天体质量中心的运动和天体繞自己质量中心的轉动(自轉)。天体的自轉与它的形状有关，而天体的形状又影响到天体間相互吸引力的大小，所以研究天体运动也必須研究天体的形状。天体力学研究的天体运动，主要是研究天体的力学运动，而且目前还是以牛頓(Newton)的万有引力定律作为基础。虽然已发現有些現象，用牛頓的万有引力定律不能解释，而愛因斯坦(Einstein)的广义相对論对这种現象則能解释得更好。不过在这方面还有待进一步研究，因此一般問題，还是以牛頓的万有引力定律作为基础。

根据天体力学的內容，它可分为三个分支。

第一个分支的主要內容是根据牛頓万有引力定律来研究天体运动的一般性质，其中包括二体問題，三体問題，多体問題，攝动理論，天体的形状和自轉理論，以及根据具体天体情况建立起来的特殊理論(包括人造天体的运动理論)等。这是整个天体力学的理論基础，大部分是数学性质的問題，但与数学不同，它是利用数学作为工具来研究天体的运动和形状的。

第二个分支的內容是用一般性质的运动理論，結合观测数值来确定天体运动的基本常数，主要是天体的质量和軌道根数。这里的天体，一般指太阳系內天体和双星。这个分支在有些地方又

叫做"軌道計算"。

第三个分支的內容是根据运动理論和軌道計算的結果来編制天体的位置表，其中包括天文年历編算，特殊行星、卫星、彗星以及人造天体的星历表的編算工作。这个分支又称为"历书天文学"。

这三个分支的內容是互相联系的。运动理論要用观測来驗証，而理論值与观測值必須在算出星历表后才能比較；但星历表的計算又一定要先得到天体的基本常数。因此，要研究天体力学中任何問題，对这三方面的內容都需要进行研究。天体力学的研究对象是具体的天体，任何理論如不能符合天体的具体情况，都是不能成立的。

§2 天体力学和其它天文学部門的关系

天文学的对象是天体，而天体力学主要研究天体的一个方面，即天体的运动和形状，是天文学的一个部門，因此必然同天文学的其它各部門有着密切的联系。

研究天体的运动和形状必需要知道天体的具体資料，这些資料是从观測得到的。而观測天体的視位置，是天体測量学的內容。同时，由理論所得的結果，也需要观測来証实。另一方面，有些天体的測量工作也要天体力学配合进行，如利用爱神星(433)来測定太阳視差，若不知道爱神星的准确位置就不能实現，而爱神星的准确位置是用天体力学方法計算出来的。

把天体力学的理論应用到恒星系，产生了一門新的分支——星系力学。它也是恒星天文学的一部分，而且按天体力学定义来讲，它又可算是天体力学的一部分。在某些天文学分类工作中，已把它归并到天体力学范圍，故天体力学同恒星天文学的关系是非常密切的。

某些天体力学問題，特别是天体形状，自轉和內部結构問題，

与天体物理学的关系很密切，因为这方面的資料，都要用天体物理方法来得到。同时天体物理学也需要研究某些天体的自轉和内部結构，要用到天体力学的方法。

射电天文学是研究天体的无綫电輻射，通过无綫电观测也可以了解天体的运动資料。对于較近天体，可用无綫电观测給出天体的形状(与光学观測的形状不同)。这些都是天体力学所需要的資料。另外，射电天文观測也必須知道所观測天体的运动規律，以便跟踪。特别在观測人造天体的工作中，天体力学和射电天文学的联系就更加密切了。

同其它天文学部門一样，天体力学对天体演化学也有重大的意义。因为在天体的起源和演化过程中，力学运动占很重要的地位，某些天体演化問題就是天体力学問題(如太阳系的稳定性)。用天体力学的理論和方法来研究天体演化問題，产生了一門新的分支——动力演化論。当然，一般較复杂的天体演化問題，不能单純靠天体力学来解决。

由上可知，天体力学与其它天文学部門是緊密联系的，故天体力学工作者还需要知道其它天文学部門的理論和技术；同时，其它天文学部門的工作者，也需要掌握天体力学的基本知識。

§3 天体力学的发展

天体力学是天文学中最古老的一个分支，又是发展得較为完善的部門，特别是1957年苏联成功地发射了人造地球卫星以后，又获得了进一步的发展。

在古代，由于农业上的需要，很早就用太阳、月球和行星的視运动来定出年、月和季节。另外，由于日月食等特殊天文現象的出現，也要求掌握太阳和月球的运动規律。因此，在世界上各文明古国，如中国、埃及和迦勒底(Chaldae)都在公元前2000年左右就发

現了太阳和月球的运动規律，以及日月食的周期。最初这些工作，都是为历法工作服务的。

随着观测的日益精确，对于天体的运动和形状的认識，就愈来愈接近实际情况。

在公元前 1100 年左右，中国周朝时代，就用观测日影长度变化，定出了黃道和赤道的交角，其数値与現代測算的結果很接近。希腊人查勒斯(Thales, 640～546 B. C.)认为地球是球形，也发現黃道同赤道有偏角，并把星分为星座。但他认为地球是宇宙的中心。毕达哥拉斯 (Pythagoras, 569～470 B. C.) 第一次提出地球除自轉外，还繞太阳运动，并认为晨星和昏星是一个星，即金星。他还认为太阳、地球和月球都是球形，行星和彗星都在繞太阳轉动。这些較正确的看法由于科学根据还不充分，沒有得到当时的重視。爱拉托斯塞尼斯(Eratosthenes, 275～194 B. C.) 第一次測量了由西恩城 (Syene) 到亚历山大里亚城的距离，証实地球为球形。依巴谷 (Hipparchus, 190～120 B. C.) 第一次认为月球軌道不是圓形(未明确提椭圓)，并测出了月球軌道同黃道的傾角，还发現了月球軌道的拱綫和交点綫都在移动。他第一次列出了太阳和月球的运动表，并且根据他自己編制的星表(約 1024 个星)发現了春分点的岁差現象。

根据古代天文學家們的观测資料和看法，特别是依巴谷的工作結果，托勒玫 (Ptolemy, 100～170 A. D.) 在公元 150 年提出了第一个宇宙构造体系的学說，即地心系統。他认为一切天体都是在繞地球旋轉，用所謂"本輪"和"均輪"来解釋行星的視运动。这个学說現在看来虽然是錯誤的，但在当时的观测水平限制下，是一种較自然的結論。根据地心系的学說是可以解釋很多天文現象的，在天文学历史上仍然起了一定的作用。另外，托勒玫还发現了地极的岁差現象，月球运动的偏差和大气折射現象。自托勒玫以

后，天文学很長时期沒有重大发展，主要因当时是处在封建統治时代，生产的发展很緩慢，对天文学的要求不高，而观測技术也不高，在天文学領域中发現的矛盾現象还不太大。但是根据長期的观測結果分析，有些人还是发現了托勒玫体系的偏差，如在公元五世紀时，罗馬的天文学家卡倍拉（Capella）曾說"金星和水星应該繞太阳运动，而不是繞地球运动"，阿拉伯的阿耳巴特尼斯（Albatenis, 850～929）也发現地心学說不能解釋行星运动。但当时一方面由于观測資料还不够多，而更重要的是地心学說与圣經上的說法一致，故在教会的压制下，沒有人敢正式提出新的学說，只是作了一些非原則的修改，基本上仍保留了地球为中心的观点。

直到1543年，偉大的波兰天文学家哥白尼（Copernicus, 1473～1543）根据前人和自己多年的观測資料，肯定了托勒玫地心学說的錯誤，第一次冲破教会的压制，提出了以太阳为中心的学說。这是天文学发展中的重大变革，使天体的运动理論接近于实际情况。更重要的是使天文学从神学的束縛下解脫出来，为天文学的发展創立了条件。当然，在当时的科学水平限制下，哥白尼的理論仍然有缺点，但行星运动以太阳为中心的看法最后被肯定下来。不久，第谷（Tycho, 1546～1601）曾提出第三种系統，认为行星繞太阳轉，而太阳、月球又繞地球轉。这种說法很快就被否定了，但他所作的長期精密观測工作，由克普勒（Kepler, 1571～1630）綜合出了著名的克普勒三大定律，发展了哥白尼的理論，更进一步符合了行星运动的实际情况。随着望远鏡的发明，天体观測工作飞跃发展，观測精确度不断提高，促使天体运动理論也更快地向前发展。

到这时为止，对天体的运动和形状的认識，只限于如何去描述，还沒有找出天体运动的原因。因此，在这以前的工作，严格讲还不能叫天体力学，主要是形态方面的研究，是天体力学的前身。但在这个时期，力的概念已有发展，而且力学原理已应用到生产实

踐中去。当时正处在文艺复兴时期，著名科学家达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452～1519)就提出天体之間存力学联系。特别是伽里略(Galilio, 1564～1642)在力学上的貢献，已初步形成了力学的体系，为以后万有引力定律的提出打下了基础。

到1685年，牛頓(1643～1727)根据前人工作和自己多年的覌测，特别根据克普勒的工作，总結出了天体运动的基本原因是天体之間相互存在引力，提出了著名的万有引力定律，較完滿地解釋了太阳系各天体的运动規律。从这时起，天体力学才算正式誕生。有了这个理論基础后，牛頓就开始建立天体力学的体系，着手研究二体問題、三体問題和月球运动理論，使得天体力学迅速地发展起来。

在1736年，欧拉(Euler, 1707～1783)提出了解析力学，后由馬克洛林(Maclaurin, 1698～1746)、达朗貝尔(D'Alembert, 1717～1783)、拉格朗日(Lagrange, 1736～1813)、雅哥比(Jacobi, 1804～1851)等人加以发展和完善，利用18和19世紀的数学分析成果，建立了研究天体运动的攝动理論。到拉普拉斯(Laplace, 1749～1827)的巨著《天体力学》出版后，天体力学的全貌已建立起来。1846年根据勒沃里叶(Leverrier, 1811～1877)和亚当斯(Adams, 1819～1892)的計算发現了海王星，这是給天体力学的可靠性以有力的証明。同时，由克雷諾(Clairaut, 1713～1765)建立起来的天体形状理論也得到了相应的发展。牛頓未完成的月球运动理論，也由德洛納(Delaunay, 1816～1872)，韓申(Hansen)，赫耳(Hill)和勃朗(Brown)等人完成，并編制了月球的运动表。到20世紀初期，紐科姆(Newcomb)等根据前人的理論和覌測資料，計算出了各大行星的运动表，成为編算天文年历的主要根据。这样一来，如果把天体限制在大行星和月球，則天体力学的任务已經基本完成了。

自19世紀初期小行星被发現后，它們中有很多軌道和大行星差别很大。特别是19世紀中期，照相术应用到天文学中，发現大量的小行星，并且也发現大量彗星和特殊卫星。以前研究大行星的方法，在研究小行星等天体时都不能适用了，可是这些天体，在实用上和天体演化問題上都占有很重要地位，这就要求天体力学迅速解决它們的运动理論。虽然在19世紀后期，也曾出現过几种小行星运动理論，如韓申和格耳登（Gyldèn）等人的理論，但是效果并不好。

为了解决小行星运动理論問題，在20世紀初期出現了两方面的工作。一个是以数字积分法为基础的特殊摄动方法，利用它可以計算天体在具体时刻的准确位置，但不能得出天体位置和軌道的分析表达式；另一种是以小行星群为对象的普遍摄动方法，采用这方法可以計算出大量小行星在相当長时期内的近似位置，但精确度不高。因此，这两种方法都还不能滿足要求。为要彻底解决这些問題，潘加来（Poincaré）和格耳登提出了三个工作方向：

(1) 用不同于古典天体力学的方法来改进摄动函数展开式的收斂性。

(2) 研究較一般的周期軌道，作为第一次近似，再加以改进。

(3) 用微分方程定性理論来研究天体的运动方程，使得不必解出方程，就能得到天体运动的某些性质。

这三个方向就是20世紀以来天体力学的基本内容。这些工作在苏联作得最多，也做得最好。

苏联列宁格勒的理論天文研究所，以前两个方向为主，在近30年来形成了"天体力学列宁格勒学派"。在第一个方向中，以苏保金（Субботин）和雅洪托娃（Яхонтова）为首，发展了格耳登和勃倫德尔（Brendel）等人的工作，得到几种比古典方法好的摄动函数展开方法，并提出了进一步研究的道路。在第二个方向的工作中，以切波

塔列夫(Чеботарев)为首，把周期軌道理論同数字积分方法結合起来,并得到了三个小行星群的周期軌道,促使这个方向进一步发展。

苏联莫斯科大学史天堡天文研究所的研究工作以第三个方向为主，被称为"天体力学莫斯科学派"。他們的工作是以微分方程定性理論为基础，以天体演化問題为目标。这方面工作由斯捷潘諾夫(Степанов)和莫伊謝夫(Моисеев)領导。由于他們在天体演化問題上的大量工作,形成了"动力演化論",主要研究各种运动的方案和它們的稳定性,也研究一些純粹力学問題。

自从牛頓万有引力定律提出以后，整个天体力学就在它的基础上建立起来，似乎可以掌握所有的天体运动規律。但是近代天文学观測工具发展非常快,行星位置的观測值就更为精密。到19世紀末,勒沃里叶根据对水星的長期观測資料的分析,发現水星的近日点移动速度比理論数値大,每百年相差43″，这样大的数値不可能是观測誤差。以后又发現月球运动有异常的加速現象，也比理論値大，因此有人开始怀疑牛頓的万有引力定律不能概括所有的天体运动。自爱因斯坦的广义相对論引力定律提出后，用它可以解释水星近日点移动的偏差，而且数値正好符合。但这个結果是假定太阳只有一个行星的情况下得到的，并未考虑到其它行星摄动是否还有变化。根据相对論的理論，所有行星都应有相似的近日点移动。現代电子計算机准确計算大行星坐标与观測比較，也証实偏差存在,但数値非常小。

从这些現象可知，广义相对論引力定律是要比牛頓万有引力定律更能符合行星的实际情况,因此，有些問題的結論，已在用广义相对論来进行修正,这是現代天体力学的一个新方向。

§4 宇宙航行时代里天体力学的任务

1957年10月4日,苏联成功地发射第一个人造地球卫星,标

志着人类历史上新紀元的开始，人类即将进入征服宇宙的宇宙航行时代。天体的范圍也扩大了，人造天体已成为天体力学的研究对象，并向天体力学提出了新的任务。

由于人造天体的发射成功，使得有史以来只能被人們观测遙望的宇宙天空，将成为人們的最大最丰富的实驗場所，天体力学也出現了一个新的部門——实驗天体力学，它的主要內容为：

(1) 研究人造地球卫星的运动。这方面的工作很多，特别是近距卫星方面。影响近距卫星运动的因素主要是地球形状和它的內部結构，以及大气阻力。由于对地球大气层的結构还未掌握，而大气情况又随季节、昼夜和太阳活动影响而变化，現在都利用人造地球卫星的軌道变化来研究地球的情况和大气結构。因此这个部門目前包括：人造地球卫星运动的力学理論；軌道設計；摄动計算方法；軌道計算方法；星历表計算方法以及利用人造地球卫星观测資料得出地球物理数据等。

(2) 研究月球火箭的运动。因为月球是宇宙航行的第一个目标，为了到达月球，首先要仔細研究月面的情况和月球附近的空間特点。为此需要发射能經过月球附近各种軌道的宇宙火箭，这些火箭称为月球火箭。关于它們的运动理論，目前还沒有建立起来。苏联第三个宇宙火箭就是一种特殊的月球火箭。月球火箭由于軌道变化快，偏心率和軌道傾角都很大，对于它們运动的研究，現有的天体力学方法都不能适用，必需創立新的理論才行。

(3) 研究月球的人造卫星运动理論。为要較长期地研究月球表面和它附近空間，必需发射宇宙火箭使它成为月球的人造卫星。但到現在为止，从地面发射月球人造卫星的可能性問題都还沒有解决，运动理論也未建立起来。

(4) 关于时間性俘获問題。为了研究月球和行星的表面和附近空間情况，发射它們的人造卫星是一种方法，但控制較困难，最

好能发射一种宇宙火箭，能在月球或行星附近繞行不太短的时期后，又能重回地球附近，把观测資料带回来，这种問題称为时間性俘获問題。現在这方面工作已开始进行。

自从人造天体出現以来，研究它們的运动就出現了一些新問題。因为影响运动的因素除万有引力外，还有大气阻力。而且人造地球卫星和宇宙火箭都是帶电物体，在帶电介质中运动还要受到电磁力的作用，而且地球和其它行星附近都有电磁場。目前，在人造地球卫星运动过程中已发現一些不能用万有引力解釋的現象，可能需要研究帶电物体在电磁場中的运动，这就使天体力学超出了經典范圍，卽不仅考虑万有引力，还要考虑阻尼介质作用和电磁力，这将使天体力学的研究方法有較基本的改变，也是天体力学工作者的一項新任务。

第一章　天体力学的基础

本章主要說明利用万有引力定律得到的初步結果。由于万有引力定律是质点間的一种力学关系，而天体却不是质点，因此要指出在哪些情况下，可以把天体考虑成为质点；在其他情况下，应該作哪些修正。然后說明在大多数情况下，可以把天体看做质点。最后从质点討論出发，得到天体运动的最基本的运动方程，即 n 体問題和行星摄动运动的微分方程。这些是后面各章的基础。

§1　万有引力定律

天体力学的基础是牛頓的万有引力定律。这定律是由克普勒三大定律綜合得出的，而克普勒三大定律又是多年观测的总結。下面首先討論从克普勒三大定律怎样綜合出万有引力定律。

1. 根据克普勒第二定律：行星向徑扫过的面积同所經过的时間成比例。从理論力学可知，这个定律就是“面积速度为常数”。并且还可知道行星是受中心力影响，而引力中心是太阳。設行星质量为 m，对太阳的向徑为 r，极角为 θ（用极坐标），所受的力为 F，则由理論力学基本公式知

$$F=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\text{❶}. \tag{1}$$

再設 h 为面积速度常数，则克普勒第二定律为

$$r^2\dot{\theta}=h. \tag{2}$$

令 $u=\dfrac{1}{r}$，利用(2)可得

---

❶ 为簡单起見，对时間 t 的微商用字母上加点来表示，例如 $\dot{r}=\dfrac{dr}{dt}$，$\ddot{r}=\dfrac{d^2r}{dt^2}$ 等。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\ddot{r}}{h^2u^2}. \tag{3}$$

由(1)，(2)，(3)消去$\dot{\theta}$，$\ddot{r}$，并把 r 换成 u 后可得

$$F = -mh^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right). \tag{4}$$

(4)式右端的負号表示所受力的方向与向徑相反，即向太阳。

2. 根据克普勒第一定律：行星繞太阳运动的軌道为椭圓，太阳位于一个焦点上。如果把极坐标的极軸取作太阳向行星近日点方向上，則行星軌道方程为

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad 或 \quad u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta, \tag{5}$$

其中 a，e 为行星軌道椭圓的半長徑和偏心率，$p = a(1-e^2)$。

由(5)式可得

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{p}\cos\theta, \quad 即 \quad u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{p},$$

代入(4)式得

$$F = -\frac{mh^2u^2}{p} = -\frac{m}{r^2}\frac{h^2}{p}. \tag{6}$$

因为 h 的定义为面积速度，即单位时間內行星向徑所扫过面积的两倍；行星公轉一周所需的时間为周期 T，所扫过的面积为整个椭圓面积 $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$，故单位时間扫过面积的两倍为

$$h = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}. \tag{7}$$

如在(6)式中令 $\mu = \frac{h^2}{p}$，以(7)式代入得

$$\mu = \frac{4\pi^2a^4(1-e^2)}{a(1-e^2)T^2} = \frac{4\pi^2a^3}{T^2}. \tag{8}$$

3. 根据克普勒第三定律：行星軌道半長徑的三次方同它的公轉周期的平方成正比。用上面記号来表示，即对所有行星而言$\frac{a^3}{T^2}$

为常数，也就是說，

$$\frac{h^2}{p}=\mu=\frac{4\pi^2a^3}{q^2}=\text{常数}\quad(\text{对所有行星而言}),$$

故(6)式成为

$$F=-\frac{m\mu}{r^2}. \tag{9}$$

换句話說，行星若按克普勒三大定律运动，則行星受到太阳方向的作用力，此力同行星的质量成正比，同行星到太阳的距离的平方成反比。

如再設太阳的质量为 M，它在太阳系中也为常数。把 μ 写成 GM，则 G 也应为常数，于是(9)式就成为 $F=-G\frac{mM}{r^2}$.

4. 牛頓用万有引力定律来推导克普勒三大定律，結果完全符合。这个推导步驟大家在理論力学中已看到了。在推导过程中，发現 μ 不应为 GM，应为 $G(M+m)$。原因是在前面討論时把太阳作为一个固定点，而实际上太阳也受行星吸引而运动，所以得出的結果应該是行星对太阳中心的相对运动，这也就是万有引力定律对克普勒三大定律的修正。牛頓用万有引力定律来計算月球运动和双星运动，計算結果和观察所得相符(当时观測精确度还不够高)，故他认为这个定律是"万有"引力定律。

万有引力常数 G，有的地方記为 k^2，k 叫做高斯(Gauss)常数，它的数值随所取单位而定。如用物理学中的 C. G. S. 制单位(即长度用厘米，质量用克，时間用秒作单位)，則 $G=k^2=6.667\times10^{-8}$。在天文学中，各种度量单位都很大，很少用 C. G. S. 制，一般用下面两种单位：

一种是：长度用地球軌道半长徑，即天文单位；时間用平太阳日；质量用太阳质量。則相应的 $k=0.017202099$。

另一种是：质量和长度单位与上一种相同，只是时間单位为

58.132441 平太阳日，则相应的 $k=1$。

討論实际問題时常用第一种单位，討論理論問題时常用第二种单位。对于某些特殊問題則采用另外的单位，例如討論月球运动时用地球与月球质量和做质量单位，以恒星月做时間单位。

§2 质点和球形物体之間的吸引

上面已談过，天体之間的相互吸引是天体运动的根本原因。如果天体为质点，則牛頓万有引力定律可以直接应用，但所有天体都不是质点，而是有不同大小形状的物体，故应把每个天体都看成无穷多个质点的組合。对一些形状和内部結构特殊的天体，也可以把它当作质点来討論。

設质点 P（质量为 m）受其他 n 个质点 P_i（质量为 m_i, $i=1, 2, 3, \cdots, n$）的吸引。取直角坐标系 $O\text{-}\xi\eta\zeta$，质点 P 和 P_i 的坐标分别为 (ξ, η, ζ) 和 (ξ_i, η_i, ζ_i)。

設 P 和 P_i 之間的距离为 r_i，則

$$r_i^2=(\xi-\xi_i)^2+(\eta-\eta_i)^2+(\zeta-\zeta_i)^2.$$

$\vec{r}_i$（由 P 向 P_i）对于三坐标軸的方向余弦为

$$\frac{\xi_i-\xi}{r_i}, \quad \frac{\eta_i-\eta}{r_i}, \quad \frac{\zeta_i-\zeta}{r_i},$$

即
$$-\frac{\partial r_i}{\partial \xi}, \quad -\frac{\partial r_i}{\partial \eta}, \quad -\frac{\partial r_i}{\partial \zeta}.$$

再設 X, Y, Z 为 P 点受引力而产生的加速度在三坐标軸方向上的分量，而 P 受 P_i 的引力为 $\frac{Gmm_i}{r_i^2}$，則根据牛頓第二定律得

$$mX=-\sum_{i=1}^{n}\frac{Gmm_i}{r_i^2}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial \xi}=m\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{Gm_i}{r_i}\right)$$
$$=m\frac{\partial}{\partial \xi}\sum_{i=1}^{n}\frac{Gm_i}{r_i},$$

即

$$X=\frac{\partial}{\partial\xi}\sum_{i=1}^{n}\frac{Gm_i}{r_i}. \tag{1}$$

同样得
$$Y=\frac{\partial}{\partial\eta}\sum_{i=1}^{n}\frac{Gm_i}{r_i},\quad Z=\frac{\partial}{\partial\zeta}\sum_{i=1}^{n}\frac{Gm_i}{r_i}.$$

若令

$$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{Gm_i}{r_i}, \tag{2}$$

則

$$X=\frac{\partial V}{\partial\xi},\quad Y=\frac{\partial V}{\partial\eta},\quad Z=\frac{\partial V}{\partial\zeta}, \tag{3}$$

其中 V 称为 n 个质点的位函数（或势函数）。由定义(2)式可看出，它同坐标系的选择无关。只要知道 V，則引力产生的加速度就可以求出。

現在来考虑一个密度均匀的球壳（不考虑厚度）对外面一质点 P 的吸引。如图 1，O 为球壳中心，令 $OP=r$. 在球壳上任一点 A 处取一寬度为无限小的圆环，环面垂直于 OP. 設 D 为圆环中心，并設 OA 同 OP 的交角为 θ，圆环寬度对应于球心的角度为 $d\theta$，球壳的面密度为 σ，半徑为 a，圆环到 P 点的距离为 x，則圆环的质量为

$$2\pi a^2\sigma\sin\theta\,d\theta,$$

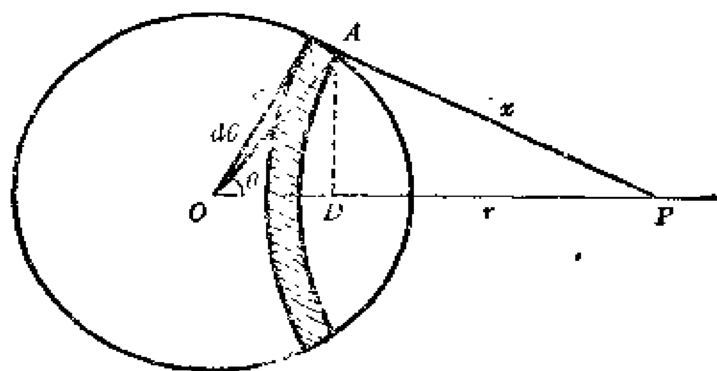


图 1

对 P 点的位函数

$$dV = G\,2\pi a^2\sigma\sin\theta\frac{d\theta}{x}.$$

由三角形 OAP 知

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$

即
$$xdx = ar\sin\theta\,d\theta,$$

代入 dV 的式子中得

$$dV = 2\pi a G\sigma\frac{dx}{r}.$$

故整个球壳对 P 点的位函数为上式的积分，积分变量 x 应有上限 $r+a$，下限 $r-a$。积分后得

$$V = 4\pi a^2\sigma\frac{G}{r}.$$

設整个球壳的质量为 M，因密度均匀，故 $M=4\pi a^2\sigma$，因此上式成为

$$V = \frac{GM}{r}. \tag{4}$$

即均匀球壳对壳外一点的位函数与整个球壳质量集中于中心时对該点的位函数相同。也就是說，如天体形状为球壳，而且密度均匀，則討論它对外面一点的吸引时，可把它当作质点看待，此质点位于球壳中心，质量为它的总质量。这样的天体是不存在的，但在后面近似討論中需要用到这个結論。

如果天体为球形，而且可以分成无限多个密度均匀的同心球壳，其共同中心即为天体中心，則此时天体对外面一质点的吸引，可看作此无限多球壳吸引的总和。上面已証明，每个球壳对外面一点的吸引，都可看作一个位于中心而质量等于球壳总质量的质点对該点的吸引，因此在研究整个天体对外一点的吸引时，也可把天体看作是一个质量集中于中心的质点。当然，这只是一个大概的叙述，严格的証明希望讀者自己去作。

把天体考虑为质量集中于中心的质点，是与实际情形很接近的。如果天体为流体(或有一阶段为流体)，沒有自轉，則由于內部重力作用，必然要形成等密度面为同心球层的情况才能达到平衡。但天体都有自轉，一般成为旋轉椭球体(卽扁球体)，內部等密度层形状也接近于旋轉椭球体。在討論它对相距較远的质点的吸引时，可以把它看作质点，但在討論它对較近的质点的吸引时，就需要作修正(例如月球受地球吸引，木星及土星对它們卫星的吸引，地球对人造地球卫星的吸引等)，这些修正在下面再讲。

§3 均匀旋轉椭球体对外面一质点的吸引

上面討論的是球形天体的吸引，在很多問題中，如卫星运动理論等，都不能把行星看成球形，較好的近似是看成密度均匀的旋轉椭球体。下面就先來导出它对外面一质点吸引的位函数。

均匀旋轉椭球体的几何中心就是质量中心，設为O。以它作为坐标原点，把旋轉軸取作Z軸。在通过O点垂直于Z軸的平面上(卽赤道面上)任取二相互垂直的軸OX，OY，作为X，Y軸，如图2。設天体內任一体积元dm，坐标为(ξ, η, ζ)，与原点距离为r；

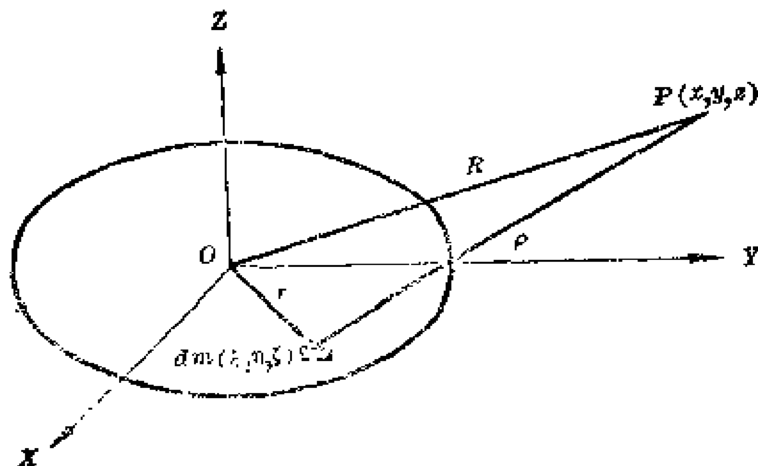


图 2

外面质点P的坐标为(x, y, z)，与原点距离为R，与dm的距离为ρ，则

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$
$$\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

故dm对P点的位函数应为

$$dV=G\frac{dm}{\rho}. \tag{1}$$

于是整个天体对P点的位函数就是对整个天体中的dm来和，即位函数为

$$V=G\iiint\frac{dm}{\rho}. \tag{2}$$

在一般情况下，$R\gg r$，故$\frac{1}{\rho}$可用二项式来展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}&=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2(x\xi+y\eta+z\zeta)}}\\&=\frac{1}{R}\left[1+\frac{r^2-2(x\xi+y\eta+z\zeta)}{R^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{R}\left[1+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{R^2}-\frac{r^2}{2R^2}\right.\\&\quad\left.+\frac{3}{2}\frac{x^2\xi^2+y^2\eta^2+z^2\zeta^2+2(xy\xi\eta+yz\eta\zeta+zx\zeta\xi)}{R^4}+\cdots\right],\end{aligned}$$

故
$$V=G\iiint\frac{dm}{\rho}=G\frac{1}{R}\iiint dm+\cdots,$$

而x, y, z与积分无关。又因原点为质量中心，坐标轴为对称轴故有

$$\iiint\xi\,dm=\iiint\eta\,dm=\iiint\zeta\,dm=0,$$
$$\iiint\xi\eta\,dm=\iiint\eta\zeta\,dm=\iiint\zeta\xi\,dm=0.$$

而 $\iiint dm = M$ 为天体总质量，因此

$$V = \frac{GM}{R} - \frac{G}{2R^3}\iiint r^2\, dm + \frac{3G}{2R^5}\iiint (x^2\xi^2 + y^2\eta^2 + z^2\zeta^2)\, dm + \cdots. \tag{3}$$

設 σ 为天体的密度。再把直角坐标 (ξ, η, ζ) 化为球坐标 (r, θ, ϕ)，則得

$$\left.\begin{aligned} dm &= \sigma r^2 \cos\phi\, d\phi\, d\theta\, dr, \\ \xi &= r\cos\phi\cos\theta, \\ \eta &= r\cos\phi\sin\theta, \\ \zeta &= r\sin\phi, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

其中 θ, ϕ 相当于經緯度。将此代入(3)式得

$$\begin{aligned} V = \frac{GM}{R} &- \frac{G\sigma}{2R^3}\iiint r^4 \cos\phi\, d\phi\, d\theta\, dr \\ &+ \frac{3G\sigma}{2R^5} x^2 \iiint r^4 \cos^3\phi \cos^2\theta\, d\phi\, d\theta\, dr \\ &+ \frac{3G\sigma}{2R^5} y^2 \iiint r^4 \cos^3\phi \sin^2\theta\, d\phi\, d\theta\, dr \\ &+ \frac{3G\sigma}{2R^5} z^2 \iiint r^4 \cos\phi \sin^2\phi\, d\phi\, d\theta\, dr + \cdots, \end{aligned}$$

其中积分限为：θ 由 $0 \longrightarrow 2\pi$，ϕ 由 $-\frac{\pi}{2} \longrightarrow +\frac{\pi}{2}$，$r$ 由 0 到天体边界。因天体为旋轉椭球体，故 θ 与 ϕ, r 无关，可以先积分出来。

$$\begin{aligned} V = \frac{GM}{R} &- \frac{G\pi\sigma}{R^3}\iint r^4 \cos\phi\, d\phi\, dr \\ &+ \frac{3G\pi\sigma}{2R^5}(x^2 + y^2)\iint r^4 \cos^3\phi\, d\phi\, dr \\ &+ \frac{3G\pi\sigma}{R^5} z^2 \iint r^4 \cos\phi \sin^2\phi\, d\phi\, dr + \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

这里的二重积分域应为椭圆面的一半，即通过 Z 轴的截面用 Z 轴分开的一半。 r 是由 O 到椭圆的边界，而在边界上的点的 r 与 ϕ 有一关系存在，即为椭圆的方程，因这里是原点在中心，按极坐标的椭圆方程应为

$$r^2=\frac{b^2}{(1-e^2\cos^2\phi)} \text{ 或 } r=b(1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

在(4)中先对 r 积分，然后用(5)代入得

$$\begin{aligned}V=&\frac{GM}{R}-\frac{G\pi\sigma b^5}{5R^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{5}{2}}\cos\phi\,d\phi\\&+\frac{3G\pi\sigma b^5}{10R^5}(x^2+y^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{5}{2}}\cos^3\phi\,d\phi\\&+\frac{3G\pi\sigma b^5}{5R^5}z^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{5}{2}}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi+\cdots.\end{aligned}$$

将 $(1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{5}{2}}$ 展开为級数，只取到 e^2 項，則为 $1+\frac{5}{2}e^2\cos^2\phi$，代入上式积分后得

$$\begin{aligned}V=&\frac{GM}{R}-\frac{G\pi\sigma b^5}{5R^3}\left(2+\frac{10}{3}e^2\right)\\&+\frac{3G\pi\sigma b^5}{10R^5}(x^2+y^2)\left(\frac{4}{3}+\frac{8}{3}e^2\right)\\&+\frac{3G\pi\sigma b^5}{5R^5}z^2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}e^2\right)+\cdots.\end{aligned}$$

因 $R^2=x^2+y^2+z^2$，若再在第二項中把 $\frac{1}{R^3}$ 換成 $\frac{x^2+y^2+z^2}{R^5}$，則得

$$V=\frac{GM}{R}+\frac{2G\pi\sigma b^5}{15R^5}(x^2+y^2-2z^2)e^2+\cdots. \tag{6}$$

这就是均匀旋轉椭球体对外面一点的位函数。若它接近球形，而外面一点的距离 R 也不太小，則取上面两項就够了。第一項即为球形(可看作质点)时的位函数，第二項为改正項，此改正項也有为 0 的时候，即在

$$x^2+y^2-2z^2=0 \tag{7}$$

时，改正项为0．(7)式为一錐面方程。若所討論的外面质点在此錐面上，則所受吸引与天体为质点时一样（略去高次項）。錐面上的点对应于天体有同一緯度，可由(7)式求出。設 ϕ 为緯度，由(7)式知：

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \phi=35°3.$$

ϕ 为負时也一样。由此可知，在 $|\phi|<35°3$ 时，改正为正的，即所受吸引比天体为质点时更大；在 $|\phi|>35°3$ 时，改正为負，則吸引比天体为质点时更小。这个結論很重要。

有时要用椭率来表示改正量。令 α 为旋轉椭球体的椭率，則

$$\alpha=\frac{a-b}{a},\ e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\alpha(2-\alpha).$$

在(6)式第二項中，引入天体总质量 $M=\frac{4\pi a^2b\sigma}{3}$，并令

$$x^2+y^2-2z^2=x^2+y^2+z^2-3z^2=R^2-3R^2\sin^2\phi,$$

則(6)式变为

$$V=\frac{GM}{R}+\frac{GMb^4\alpha(2-\alpha)}{10R^3a^2}(1-3\sin^2\phi)+\cdots.$$

因为 $1-\alpha=\frac{b}{a}$，用此式代入上式，如只写出 α 的一次項，則得

$$V=\frac{GM}{R}\left[1+\frac{\alpha}{5}(1-3\sin^2\phi)\left(\frac{b}{R}\right)^2+\cdots\right]. \tag{8}$$

(8)式为經常用到的形式。

§4 均匀椭球体对内部一质点的吸引

上节是討論旋轉椭球体吸引的近似結果，下面两节将討論一般均匀椭球体（或称三軸椭球体）吸引的准确結果。現先討論均匀

椭球体对内部一质点的吸引情形。

設以椭球体中心为原点，对称轴为坐标轴，則椭球表面的方程为

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

若 P 为它内部一点，坐标为 (x, y, z)，并設椭球体内任一体积元 dm 与 P 的距离为 ρ，因 P 在天体内部，故 ρ 可以接近于 0，因此不能用 (1–3–1) ❶ 式形式来求位函数 V。取 P 点作坐标原点，用球坐标，則

$$\left.\begin{aligned} dm&=\sigma\rho^2\cos\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho,\\ \xi&=x+\rho\cos\phi\cos\theta,\\ \eta&=y+\rho\cos\phi\sin\theta,\\ \zeta&=z+\rho\sin\phi,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

故

$$V=G\iiint\frac{dm}{\rho}=G\sigma\iiint\rho\cos\phi\, d\phi\, d\theta\, d\rho. \tag{3}$$

在(3)中就避免了分母为 0 的情形。此积分的限中，θ 仍为 0 到 2π；ϕ 仍为 $-\frac{\pi}{2}\to+\frac{\pi}{2}$；$\rho$ 为由 0 到边界上的 ρ_1，其中 ρ_1 应为 θ, ϕ 的函数。ρ_1 既为边界上点的 ρ，而边界上点的坐标 (ξ, η, ζ) 应满足 (1) 式，故在 (2) 式中把 ρ 换为 ρ_1 即表示边界上点的坐标。将其代入(1)式，按 ρ_1 整理后得出 ρ_1 同 θ, ϕ 的关系式为

$$A\rho_1^2+2B\rho_1+C=0, \tag{4}$$

其中

---

❶ 引用公式的序码，第一字表示章，第二字表示节，第三字表示公式序。例(1–3–1)即表示第一章，第三节中的第一个公式，以下同。又本节的公式只用一个序码表示。

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{\cos^2\phi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\sin^2\phi}{c^2},\\
B&=\frac{x\cos\phi\cos\theta}{a^2}+\frac{y\cos\phi\sin\theta}{b^2}+\frac{z\sin\phi}{c^2},\\
C&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

从(4)式可以解出

$$\rho_1=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

因 $P(x, y, z)$在椭球体内部，故 $C<0$；但 $A>0$，故 $B^2-AC>0$，并且$\sqrt{B^2-AC}>|B|$，而 ρ_1 必须为正，故根号前的符号应取正号，即

$$\rho_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}.\tag{6}$$

在(3)式中先对 ρ 积分，以(6)式代入得

$$\begin{aligned}
V&=G\sigma\iint\frac{1}{2}\rho_1^2\cos\phi\,d\theta\,d\phi\\
&=\frac{G\sigma}{2}\iint\left[\frac{2B^2-AC-2B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}\right]\cos\phi\,d\phi\,d\theta.
\end{aligned}\tag{7}$$

此积分可分为三项，方括号内最后一项积分应为

$$V_1=-\frac{G\sigma}{2}\iint\frac{2B}{A^2}\sqrt{B^2-AC}\cos\phi\,d\phi\,d\theta.$$

若把其中 ϕ 换成 $-\phi$，θ 换成 $\theta+\pi$，积分值应该不变。但用此变换代入后，A^2, B^2, AC 都不变，而 B 正好反号，故此积分 V_1 为0，因此(7)式为

$$\begin{aligned}
V&=\frac{G\sigma}{2}\iint\frac{2B^2-AC}{A^2}\cos\phi\,d\phi\,d\theta\\
&=\frac{G\sigma}{2}\iint\left[\frac{\cos^2\phi\cos^2\theta}{a^2}\left(\frac{2x^2}{a^2}-C\right)\right.\\
&\quad+\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{b^2}\left(\frac{2y^2}{b^2}-C\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{\sin^2\phi}{c^2}\left(\frac{2z^2}{c^2}-C\right)\Big]\frac{\cos\phi\, d\phi\, d\theta}{A^2}$$

$$+2G\sigma\iint\Big[\frac{xy\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta}{a^2b^2}+\frac{yz\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{b^2c^2}$$

$$+\frac{zx\cos\phi\sin\phi\cos\theta}{c^2a^2}\Big]\frac{\cos\phi\, d\phi\, d\theta}{A^2}.$$

这个面积分的后三项分成三个积分，如用 $\phi\to-\phi$，或 $\theta\to2\pi-\theta$，积分值都应不变。但前两个在 $\theta\to2\pi-\theta$ 时反号，后一个在 $\phi\to-\phi$ 时反号，結果都应等于0。因此

$$V=-\frac{G\sigma C}{2}\iint\frac{\cos\phi\, d\theta\, d\phi}{A}+G\sigma\iint\Big[\frac{x^2}{a^2}\frac{\cos^2\phi\cos^2\theta}{a^2}$$

$$+\frac{y^2}{b^2}\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\frac{\sin^2\phi}{c^2}\Big]\frac{\cos\phi\, d\phi\, d\theta}{A^2}.$$

令

$$W=\frac{G\sigma}{2}\iint\frac{\cos\phi\, d\theta\, d\phi}{A}$$

$$=\frac{G\sigma}{2}\iint\frac{\cos\phi\, d\phi\, d\theta}{\frac{\cos^2\phi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\sin^2\phi}{c^2}},\tag{8}$$

则

$$V=-CW+\frac{x^2}{a}\frac{\partial W}{\partial a}+\frac{y^2}{b}\frac{\partial W}{\partial b}+\frac{z^2}{c}\frac{\partial W}{\partial c}.\tag{9}$$

从(8)式知，W 只与 a, b, c 有关，故对确定的椭球体而言，W, $\frac{\partial W}{\partial a}$, $\frac{\partial W}{\partial b}$, $\frac{\partial W}{\partial c}$ 都是常量，而由(5)式中 C 的定义知 C 为 x^2, y^2, z^2 的綫性組合。以(5)式的 C 代入(9)式，使(9)式成为

$$C_1x^2+C_2y^2+C_3z^2=V-W,\tag{10}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为常数(只含 a, b, c)。若令 $V=$常数，则(10)式表示(x, y, z)的一个二次曲面，在此曲面上所有点的 V 都相等，称为等位面。

在积分(8)式时，可先对 θ 积分。为計算方便起見，令

$$M=\frac{\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\sin^2\phi}{c^2},\quad N=\frac{\cos^2\phi}{b^2}+\frac{\sin^2\phi}{c^2},\tag{11}$$

故

$$W=\frac{G\sigma}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi\,d\theta\,d\phi}{M\cos^2\theta+N\sin^2\theta}.\tag{12}$$

从(11)式知 M, N 与 θ 无关。把(12)式对 θ 积分后得

$$\begin{aligned}W&=2\pi G\sigma\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{MN}}\\&=2\pi abc^2G\sigma\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{(a^2\sin^2\phi+c^2\cos^2\phi)(b^2\sin^2\phi+c^2\cos^2\phi)}}.\end{aligned}\tag{13}$$

用变换 $\sin\phi=\frac{c}{\sqrt{c^2+s}}$，将积分变量换为 s，则

$$W=2\pi abcG\sigma\int_0^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},\tag{14}$$

代入(9)式得

$$\begin{aligned}V=\pi abcG\sigma\int_0^{\infty}\Big(1&-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}\\&-\frac{z^2}{c^2+s}\Big)\frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}.\end{aligned}\tag{15}$$

于是 P 点所受引力产生的加速度的三分量为

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{\partial V}{\partial x}=-\int_0^{\infty}\frac{2\pi abcG\sigma x\,ds}{(a^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},\\Y&=\frac{\partial V}{\partial y}=-\int_0^{\infty}\frac{2\pi abcG\sigma y\,ds}{(b^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},\\Z&=\frac{\partial V}{\partial z}=-\int_0^{\infty}\frac{2\pi abcG\sigma z\,ds}{(c^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

在旋轉椭球体的情形，有 $a=b$，此时上式可以积分出来。若 a, b, c 互不相等，設 $a>b>c$，則上面积分可表为椭圓函数。

在(13)式中，把变量换为 u，并定义

$$\sin\phi=\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{17}$$

代入(13)式得

$$W=\frac{2\pi abcG\sigma}{\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{18}$$

其中
$$k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}<1.$$

(18)式即为椭圆积分形式。利用(18)式即可得 V, X, Y, Z 的相应結果。

下面証明一个重要定理。从(8)式知 W 为 a, b, c 的二次齐次式，故 $\frac{\partial W}{\partial a}$, $\frac{\partial W}{\partial b}$, $\frac{\partial W}{\partial c}$ 应为 a, b, c 的一次齐次式；由(9)式知

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{2x}{a^2}W+\frac{2x}{a}\frac{\partial W}{\partial a}$$

应为 a, b, c 的零次齐次式。$\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ 也是一样。根据齐次式的性质知，若把 a, b, c 同乘上一个因子 μ，则 $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ 只需乘上因子 $\mu^0=1$，即不变，故得到下面定理：

定理　若均匀椭球体的三主徑 a, b, c 增大同样倍数，则对它內部一点吸引产生的加速度不变。

§5　均匀椭球体对外面一质点的吸引

均匀椭球体对外面一质点吸引的情形要比对内部质点的吸引复杂得多。下面用一种特殊方法来討論。

設此椭球面的方程为

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

$P'(x', y', z')$ 为它外面一点。现在通过 P' 点作一个与原来(1)式共焦的椭球面，它的方程应为

$$\frac{\xi'^2}{a^2+k}+\frac{\eta'^2}{b^2+k}+\frac{\zeta'^2}{c^2+k}-1=0, \tag{2}$$

其中 k 为引入的参数，可以用 P' 点的坐标 (x', y', z') 来决定。因 P' 点在椭球(2)上，故它的坐标应满足

$$\frac{x'^2}{a^2+k}+\frac{y'^2}{b^2+k}+\frac{z'^2}{c^2+k}-1=0,$$

其中 a, b, c, x', y', z' 都是已知量，故上式为 k 的一个代数方程，而且是三次方程。下面証明它只有一个正实根。設

$$F(k)=\frac{x'^2}{a^2+k}+\frac{y'^2}{b^2+k}+\frac{z'^2}{c^2+k}-1,$$

则 $F(0)>0$ （因 P' 点在原椭球面外），$F(+\infty)=-1<0$，但 $F(k)$ 在 $k>0$ 时为連續函数，即方程至少有一个正实根。又因

$$\frac{dF}{dk}=-\frac{x'^2}{(a^2+k)^2}-\frac{y'^2}{(b^2+k)^2}-\frac{z'^2}{(c^2+k)^2}$$

在 $k>0$ 时永远为負，而且 $F(k)$ 在 $k>0$ 时連續，故可知 $F(k)=0$ 在 $k>0$ 时只有一个根。

因三次方程可以完全解出，故可以假定此根已求出，下面就把 k 当作已知量来計算。令

$$a'^2=a^2+k, \quad b'^2=b^2+k, \quad c'^2=c^2+k, \tag{3}$$

故方程(2)成为

$$\frac{\xi'^2}{a'^2}+\frac{\eta'^2}{b'^2}+\frac{\zeta'^2}{c'^2}-1=0. \tag{4}$$

在椭球面(1)，(4)之間可以作一变換，使它們上面的点一一对应，令此变換为

$$\xi'=\frac{a'}{a}\xi, \quad \eta'=\frac{b'}{b}\eta, \quad \zeta'=\frac{c'}{c}\zeta. \tag{5}$$

設 $P(x, y, z)$ 在椭球面(1)上，$P'(x', y', z')$ 在(4)上，彼此对应(图 3)。令 E 表示椭球面(1)，E' 表示椭球面(4)。設 E' 的密度与 E 相同，并設 V, X, Y, Z 分別为 E' 对 P 点吸引的位函数

和加速度分量；V'，X'，Y'，Z' 分别为 E 对 P' 点吸引的位函数和加速度分量。则

$$\left.\begin{aligned} V&=G\sigma\iiint_{E'}\frac{1}{\rho'}\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta',\\ X&=G\sigma\iiint_{E'}\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho'}\right)}{\partial\xi'}\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

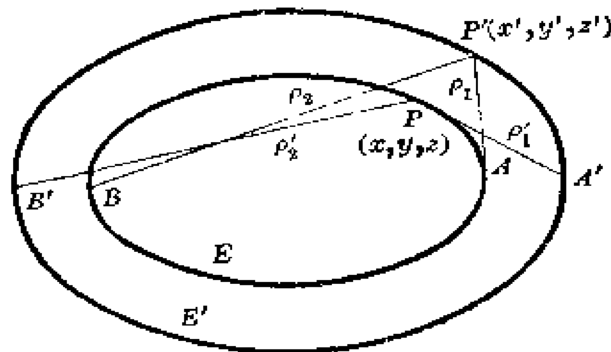


图 3

Y，Z 的形式相同。同样

$$X'=G\sigma\iiint_{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{7}$$

Y'，Z' 的形式亦相同。在 X，X' 的积分中可先对 ξ，ξ' 积分，积分限应为椭球 E，E' 中 ξ，ξ' 的最大和最小值，即相应于图中的 A, B，A'，B' 点，对应的 ρ 分别为 ρ_1，ρ_2，ρ_1'，ρ_2'。因此积出后成为

$$\left.\begin{aligned} X&=G\sigma\iint\left(\frac{1}{\rho_2'}-\frac{1}{\rho_1'}\right)d\eta'\,d\zeta',\\ X'&=G\sigma\iint\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)d\eta\,d\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

下面来証明 $\rho_1=\rho_1'$，$\rho_2=\rho_2'$。因 A，A' 点的坐标为 $(a,0,0)$，$(a',0,0)$，故

$$\rho_1^2=P'A^2=(x'-a)^2+y'^2+z'^2,\quad \rho_1'^2=(x-a')^2+y^2+z^2,$$

$$\rho_1^2-\rho_1'^2=(x'^2+y'^2+z'^2)-(x^2+y^2+z^2)-2ax'+2a'x+a^2-a'^2.$$

又因 P, P' 为对应点,则有

$$x'=\frac{a'}{a}x,\quad y'=\frac{b'}{b}y,\quad z'=\frac{c'}{c}z,\tag{9}$$

故
$$x'^2-x^2=x^2\frac{a'^2-a^2}{a^2}=k\frac{x^2}{a^2}.$$

同理
$$y'^2-y^2=k\frac{y^2}{b^2},\quad z'^2-z^2=k\frac{z^2}{c^2}.$$

把这些結果代入 $\rho_1^2-\rho_1'^2$ 的式子中得

$$\rho_1^2-\rho_1'^2=k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+a^2-a'^2=k+a^2-a'^2=0$$

$\left(\text{因 } P \text{ 点在椭球面 } E \text{ 上,故} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$. 但 ρ_1, ρ_1' 均为正,故 $\rho_1=\rho_1'$。同样可証 $\rho_2=\rho_2'$。其实这个結果可以推广到任意两組对应点:若 P 对应 P', Q 对应 Q', 則有 $PQ'=P'Q$.

由于 $\rho_1=\rho_1'$, $\rho_2=\rho_2'$, 故(8)式中括号内的量相同。但根据(5)式

$$d\xi'=\frac{a'}{a}d\xi,\quad d\eta'=\frac{b'}{b}d\eta,\quad d\zeta'=\frac{c'}{c}d\zeta,$$

故(8)式中第一式为

$$\left.\begin{aligned}&X=G\sigma\iint\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\frac{b'c'}{bc}\,d\eta\,d\zeta=\frac{b'c'}{bc}X'.\\ &\text{同理}\quad Y=\frac{c'a'}{ca}Y',\quad Z=\frac{a'b'}{ab}Z'.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

X, Y, Z 为均匀椭球体 E' 对内部一点 $P(x, y, z)$ 的吸引所产生的加速度的分量,从(1-4-16)式知它們为

$$X=-\int_0^\infty\frac{2\pi G\sigma a'b'c'x\,ds'}{(a'^2+s')\sqrt{(a'^2+s')(b'^2+s')(c'^2+s')}}.\tag{11}$$

Y, Z 的形式相同。因 $x=x'\dfrac{a}{a'}$, 并利用(10)式得

$$\left.\begin{aligned}
X' &= -\int_0^\infty \frac{2\pi G\sigma\, abc\, x'ds'}{(a'^2+s')\sqrt{(a'^2+s')(b'^2+s')(c'^2+s')}},\\
\text{同样}\quad Y' &= -\int_0^\infty \frac{2\pi G\sigma\, abc\, y'ds'}{(b'^2+s')\sqrt{(a'^2+s')(b'^2+s')(c'^2+s')}},\\
Z' &= -\int_0^\infty \frac{2\pi G\sigma\, abc\, z'ds'}{(c'^2+s')\sqrt{(a'^2+s')(b'^2+s')(c'^2+s')}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

如再把分母中的 a', b', c' 换成 a, b, c，由 $a'^2=a^2+k, b'^2=b^2+k$, $c'^2=c^2+k$，并令 $s'=s+k$，则(12)成为

$$\left.\begin{aligned}
X' &= -\int_k^\infty \frac{2\pi G\sigma\, abc\, x'\,ds}{(a^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},\\
Y' &= -\int_k^\infty \frac{2\pi G\sigma\, abc\, y'\,ds}{(b^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},\\
Z' &= -\int_k^\infty \frac{2\pi G\sigma\, abc\, z'\,ds}{(c^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

从(13)式可看出，均匀椭球体对外面一点的吸引所产生的加速度分量，与内点情形相同，只是积分下限从 0 变成 k。也就是說，在外点情形中，令 $k=0$ 即为内点情形。

利用(13)式可得到均匀旋轉椭球体情形的準确結果。

一、对扁球体情形

設 $a=b>c$，则(13)式可积分出来成为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{X'}{x'}=\frac{Y'}{y'} &= -2G\pi\sigma\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\Bigg[-\frac{ae}{\sqrt{a^2+k}}\sqrt{1-\frac{a^2e^2}{a^2+k}}\\
&\qquad\qquad +\arcsin\frac{ae}{\sqrt{a^2+k}}\Bigg],\\
\frac{Z'}{z'} &= -\frac{4\pi G\sigma}{e^3}\Bigg[\frac{ce}{\sqrt{c^2+k}}\\
&\qquad -\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{ce}{\sqrt{(1-e^2)(c^2+k)}}\Bigg].
\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

二、对于长球体情形

設 $a=b<c$，则积分后形式为

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = &-\frac{2\pi G\sigma}{e^3}\Bigg[\frac{ae}{\sqrt{a^2+k}}\sqrt{1-e^2+\frac{a^2e^2}{a^2+k}} \\
&-(1-e^2)\log\left(\frac{ae}{\sqrt{(1-e^2)(a^2+k)}}\right) \\
&+\sqrt{1+\frac{a^2e^4}{(1-e^2)(a^2+k)}}\Bigg], \\
\frac{Z'}{z'} = -2\pi G\sigma\,&\frac{1-e^2}{e^3}\Bigg[-\frac{2ce}{\sqrt{c^2+k}} \\
&+\log\left(1+\frac{ce}{\sqrt{c^2+k}}\right)-\log\left(1-\frac{ce}{\sqrt{c^2+k}}\right)\Bigg],
\end{aligned}
\right\} \quad (15)
$$

其中 e 表示旋轉椭球体的偏心率，在(14)中为 $c^2=a^2(1-e^2)$，在(15)式中为 $a^2=c^2(1-e^2)$；对数符号都是自然对数。

下面再証明一个重要定理。利用本节最初的記号：X, Y, Z 和 X', Y', Z' 各表示 E' 和 E 对 P, P' 点吸引的加速度分量，再設 X'', Y'', Z'' 为 E' 对 P' 的吸引加速度分量。由于 P' 点在 E' 的表面上，旣可以看成 E' 的内点，又可以看成外点。如看成内点，則积分下限为 0；如看成外点，則因通过 P' 点的共焦椭圓就是 E' 本身，故对应的 $k=0$。这两种情形都有同样結果。把 P' 看成 E' 的内点，則 P, P' 都是 E' 的内点，按照(1-4-16)式知 E' 对 P, P' 点吸引的加速度为

$$
X = -\int_0^\infty \frac{2\pi G\sigma a'b'c'x\,ds}{(a'^2+s)\sqrt{(a'^2+s)(b'^2+s)(c'^2+s)}},
$$

$$
X'' = -\int_0^\infty \frac{2\pi G\sigma a'b'c'x'ds}{(a'^2+s)\sqrt{(a'^2+s)(b'^2+s)(c'^2+s)}},
$$

卽得
$$
\frac{X''}{X} = \frac{x'}{x}.
$$

但从(9)式知 $\frac{x'}{x}=\frac{a'}{a}$，故 $\frac{X''}{X}=\frac{a'}{a}$.

同理
$$\frac{Y''}{Y}=\frac{b'}{b}, \quad \frac{Z''}{Z}=\frac{c'}{c}.$$
将这些关系代入(10)式，消去 X, Y, Z 得
$$\frac{X''}{X'}=\frac{Y''}{Y'}=\frac{Z''}{Z'}=\frac{a'b'c'}{abc}=\frac{M'}{M}, \tag{16}$$
其中 M, M' 为 E, E' 的总质量$\left(M=\frac{4}{3}\pi abc,\ M'=\frac{4}{3}\pi a'b'c'\right)$.

由(16)式表明：均匀椭球体 E 对外面一点 P' 吸引的加速度分量与通过 P' 点的共焦椭球体 E' 对 P' 点吸引的加速度分量之比等于 E, E' 质量之比。

再設 E''' 为在 E' 內的任一个共焦等密度均匀椭球体，对 P' 点吸引的加速度为(X''', Y''', Z''')，而质量为 M'''，則利用(16)式結果可得
$$\frac{X'''}{X''}=\frac{Y'''}{Y''}=\frac{Z'''}{Z''}=\frac{M'''}{M'}.$$
与(16)式比較，消去 X'', Y'', Z'' 得
$$\frac{X'''}{X'}=\frac{Y'''}{Y'}=\frac{Z'''}{Z'}=\frac{M'''}{M}. \tag{17}$$

因 P' 为 E, E''' 的外点，故(17)式說明下面定理成立。

定理　两共焦等密度均匀椭球体对外面一点吸引的加速度之比等于两椭球体质量之比。

这个定理最初由馬克洛林和拉格朗日在旋轉椭球体的情况导出，后由艾沃利(Ivory)推广到一般均匀椭球体情形，故称为艾沃利定理。

§6　地球对外面一质点的吸引

上面三节都是讲均匀椭球体的情形，但一般天体都不是均匀椭球体，而且絕大多数天体的密度分布，都是愈近中心愈大，地球就是这样的。在討論人造卫星运动和岁差章动理論时，都不能把

地球看成均匀椭球体。下面推出討論人造卫星运动时需要用到的結果，至于岁差章动理論所用的形式，在后面第七章中再讲。

把地球仍然看成旋轉椭球体，故推导与§3中相同，只是密度 σ 不是常数，而是向徑 r 的函数。設地球的等密度面仍为旋轉椭球面，而且偏心率 e 都是一样，与地面相同，因此密度 σ 与变量 θ 无关，故§3中的推导，前面完全一样，只是(1-3-4)式应写为

$$
\begin{aligned}
V = \frac{GM}{R} &- \frac{G\pi}{R^3}\iint \sigma r^4 \cos\phi \, d\phi \, dr \\
&+ \frac{3G\pi}{2R^5}(x^2+y^2)\iint \sigma r^4 \cos^3\phi \, d\phi \, dr \\
&+ \frac{3G\pi}{R^5} z^2 \iint \sigma r^4 \sin^2\phi \cos\phi \, d\phi \, dr + \cdots .
\end{aligned} \tag{1}
$$

这里的积分区域应为地球的子午截面的椭圆内部，密度 σ 应为 r,ϕ 的函数，但这里等密度区是与地球子午綫相似的椭圓（即偏心率相同），故可把积分区域划分成一层层的相似椭圓，每一层椭圓即为等密度区。設每个椭圓的方程为

$$
r^2 = \frac{b^2}{1-e^2\cos^2\phi}, \quad r = b\,(1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2}
$$

这里 e 为常数。若把 b 看作参变量，就可以决定每个椭圓的大小，故可以把积分变量变成 b, ϕ；b 由 $0 \to B$（地面极半徑），这样密度 σ 就只同 b 有关，而且在每个椭圓中 b 与 ϕ 无关，故由(2)得 r, b 的关系为

$$
dr = (1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{1}{2}} db.
$$

与(2)式一并代入(1)式得

$$
\begin{aligned}
V = \frac{GM}{R} &- \frac{G\pi}{R^3}\int_0^B \sigma b^4 \, db \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{5}{2}} \cos\phi \, d\phi \\
&+ \frac{3G\pi}{2R^5}(x^2+y^2)\int_0^B \sigma b^4 \, db \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{5}{2}} \cos^3\phi \, d\phi
\end{aligned}
$$

$$+\frac{3G\pi}{R^5}z^2\int_0^B\sigma\, b^4\,db\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-e^2\cos^2\phi)^{-\frac{5}{2}}\cos\phi\sin^2\phi\,d\phi+\cdots.$$

若对 $d\phi$ 的积分只准确到 e^2 項，积出結果与 §3 中相同，整理后得

$$V=\frac{GM}{R}+\frac{2G\pi}{3R^5}(x^2+y^2-2z^2)e^2\int_0^B\sigma\, b^4 db+\cdots$$

$$=\frac{GM}{R}+\frac{2G\pi}{3R^3}(1-3\sin^2\phi)e^2\int_0^B\sigma\, b^4 db+\cdots. \tag{3}$$

按照习惯記法，令

$$J=\frac{2\pi}{MR_{\oplus}^2}\int_0^B e^2\sigma\, b^4\,db=\frac{2\pi}{MR_{\oplus}^2}\int_0^{R_{\oplus}}\sigma\, e^2a^4(1-e^2)^{\frac{5}{2}}da.$$

如只准确到 e^2 項，上式可写为

$$J=\frac{2\pi}{MR_{\oplus}^2}\int_0^{R_{\oplus}}\sigma\, e^2a^4\sqrt{1-e^2}\,da, \tag{4}$$

其中 $R_{\oplus}$ 为地面赤道半徑，$a=\frac{b}{\sqrt{1-e^2}}$ 为每个椭圓的半长徑，故(3)式成为

$$V=\frac{GM}{R}+\frac{GJMR_{\oplus}^2}{3R^3}(1-3\sin^2\phi)+\cdots. \tag{5}$$

(5)式为一般常用的形式，其中 J 为捷弗里斯(Jeffreys)常数，它与地球内部密度分布有关。經地球物理学方法测定出的結果为

$$J=0.001637.$$

如把 V 的展开式展到 $\frac{1}{R^5}$ 項，则整理后得最后結果为

$$V=\frac{GM}{R}+\frac{GJMR_{\oplus}^2}{3R^3}e^2(1-3\sin^2\phi)$$

$$+\frac{GDMR_{\oplus}^4}{35R^5}(3-30\cos^2\phi+35\cos^4\phi), \tag{6}$$

其中

$$D=\frac{7\pi}{2MR_{\oplus}^4}\int_0^{R_{\oplus}}\sigma\, a^6e^4\sqrt{1-e^2}\,da, \tag{7}$$

这也是捷弗里斯常数之一。根据地球物理方法測出的結果，$D=0.0000107$。在討論人造地球卫星运动过程中，一般只考虑 J 就够了。

§7 n 体問題的运动方程和它們的初积分

根据上面几节的討論，在一般情况下，可以把天体看成质点，只是在极少数情况下才作修正。下面先把天体看成质点来討論。

1. 設有 n 个天体，$P_1, P_2, \cdots, P_n$，它們的质量各为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，在同一直角坐标系中它們的坐标分别为：(ξ_1, η_1, ζ_1)，(ξ_2, η_2, ζ_2)，…，(ξ_n, η_n, ζ_n)。設 Δ_{ij} 为任意两天体 P_i, P_j 在某时刻 t 时的距离，即

$$\Delta_{ij}^2=(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i-\eta_j)^2+(\zeta_i-\zeta_j)^2,$$

那末，任一天体 P_i 受其它 $n-1$ 个天体吸引的位函数为

$$G\left(\frac{m_1}{\Delta_{i1}}+\frac{m_2}{\Delta_{i2}}+\cdots+\frac{m_n}{\Delta_{in}}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}}\quad(j\neq i),$$

因此 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的运动方程应为

$$m_i\ddot{\xi}_i=Gm_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}}\quad(j\neq i). \tag{1}$$

η_i, ζ_i 的方程相同。

如果令

$$U=G\left\{\frac{m_1m_2}{\Delta_{12}}+\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}}+\cdots+\frac{m_1m_n}{\Delta_{1n}}\right.$$
$$+\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}+\frac{m_2m_4}{\Delta_{24}}+\cdots+\frac{m_2m_n}{\Delta_{2n}}$$
$$\left.+\cdots+\frac{m_{n-1}m_n}{\Delta_{n-1,n}}\right\}=G\sum_{i,j=1}^{n}\frac{m_im_j}{\Delta_{ij}}\quad(i<j), \tag{2}$$

則 U 对 ξ_i（或 η_i, ζ_i）的偏导数只包含其中有 m_i 的項，即为(1)式右端各項（注意 $\Delta_{ij}=\Delta_{ji}$），故运动方程可写为

同理得

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i\ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 $i=1, 2, 3, \cdots, n$，故(3)式一共有 $3n$ 个方程。求这 $3n$ 个方程的解，就称为 n 体問題或多体問題；如 $n=2$ 則称为二体問題；$n=3$ 称为三体問題，依此类推。

2．由(3)式可知，U 对坐标的偏导数卽为引力在該坐标上的分量，因此把它叫做力函数。由(2)式可知，它也同坐标系的选擇无关。力函数不仅是数学上的一个定义，它还有力学上的意义。

先看最簡单的情形。設 $n=2$，討論 P_2 在 P_1 吸引下的运动。若先认为 P_1 不动，則力函数 U_2 为 $G\frac{m_1m_2}{\Delta_{12}}$，$P_2$ 所受的引力分量为

$$\frac{\partial U_2}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial \eta_2}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial \zeta_2}.$$

則 P_2 由某点 A 經任何路綫到达 P_2 所作的功为綫积分

$$\int_A^{P_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi_2}d\xi_2+\frac{\partial U_2}{\partial \eta_2}d\eta_2+\frac{\partial U_2}{\partial \zeta_2}d\zeta_2\right).$$

由于认为 P_1 不动，故 U_2 只同 P_2 的坐标有关，因此上式中积分号内的量为 dU_2。积分后得 $U_2(P_2)-U_2(A)$。

若 $A\to\infty$，則 $U_2(A)=0$，积分值成为 $U_2(P_2)=U_2$。位能的定义正是这样，只是方向相反，故二体系統中的位能为 $-U_2$。

現在再加上第三体 P_3，則 P_3 受 P_1，P_2 的引力分量为

$$G\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}}+\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}\right), \quad G\frac{\partial}{\partial \eta_3}\left(\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}}+\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}\right),$$

$$G\frac{\partial}{\partial \zeta_3}\left(\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}}+\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}\right).$$

与前面討論一样，由无穷远到达 P_3 所作的功为

$$G\left(\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}}+\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}\right), \tag{4}$$

卽 P_3 对 P_1, P_2 系統的位能反号，故整个三体系統的位能为(4)式再加上 $-U_2$，卽

$$-G\left(\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}}+\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}\right)-G\frac{m_1m_2}{\Delta_{12}}=-U_3.$$

同理推广到 n 体系統，卽 n 体系統的力函数 U[由(2)式定义]为整个系統的总位能的反号。这就是 U 的力学意义。

3. 求(3)式的积分，由

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{1}{\Delta_{ij}}\right)=-\frac{\xi_i-\xi_j}{\Delta_{ij}^3}$$

得

$$\begin{aligned}m_i\ddot{\xi}_i&=\frac{\partial U}{\partial\xi_i}=Gm_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}}\\&=-G\sum_{j=1}^{n}\frac{m_im_j(\xi_i-\xi_j)}{\Delta_{ij}^3}\quad(j\neq i),\end{aligned}\tag{5}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\xi}_i=-G\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_im_j(\xi_i-\xi_j)}{\Delta_{ij}^3}\quad(j\neq i).\tag{6}$$

(6)式右端共 $n(n-1)$ 項，容易看出应等于零，因其中任一項都有一对应項(i, j 交換)同它数值相等而符号相反。故(6)式成为

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\xi}_i=0,\\ \text{同理}\qquad&\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\eta}_i=0,\qquad\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\zeta}_i=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

(7)式可直接对时間 t 进行积分，积分一次得

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\xi}_i=\alpha_1,\qquad\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\eta}_i=\beta_1,\qquad\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\zeta}_i=\gamma_1.\tag{8}$$

再积分一次得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} m_i\xi_i=\alpha_1 t+\alpha_2, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\eta_i=\beta_1 t+\beta_2,\\&\sum_{i=1}^{n} m_i\zeta_i=\gamma_1 t+\gamma_2.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(8)，(9)两式为微分方程組(3)的6个积分，其中 α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 为6个积分常数。这6个积分有力学意义。

設 $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ 为 n 体系統质量中心的坐标，并令总质量为 $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$，則由质量中心的定义得

$$M\bar{\xi}=\sum_{i=1}^{n} m_i\xi_i,$$

故
$$M\frac{d\bar{\xi}}{dt}=\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\xi}_i.$$

同样得
$$M\frac{d\bar{\eta}}{dt}=\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\eta}_i; \quad M\frac{d\bar{\zeta}}{dt}=\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\zeta}_i.$$

代入(8)，(9)式得

$$M\bar{\xi}=\alpha_1 t+\alpha_2, \quad M\bar{\eta}=\beta_1 t+\beta_2, \quad M\bar{\zeta}=\gamma_1 t+\gamma_2; \tag{10}$$

$$M\frac{d\bar{\xi}}{dt}=\alpha_1, \quad M\frac{d\bar{\eta}}{dt}=\beta_1, \quad M\frac{d\bar{\zeta}}{dt}=\gamma_1. \tag{11}$$

(10)式說明质量中心的运动是直綫运动，(11)式說明质量中心的运动速度为常数，也就是說，质量中心在作等速直綫运动。事实上，根据牛頓第一运动定律：物体在不受外力情况下，靜者恒靜，动者恒在一直綫上作等速直綫运动。如果把 n 体系統看成一个整体，則它只受內部自己的吸引，不受外力的作用。因此上面結果只不过是牛頓万有引力定律的反映。(8)，(9)两式的6个积分，一般称为质量中心运动积分。

4．根据 U 的定义知

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=-Gm_i\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j(\xi_i-\xi_j)}{\Delta_{ij}^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_i}=-Gm_i\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j(\eta_i-\eta_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

故
$$\xi_i\frac{\partial U}{\partial \eta_i}-\eta_i\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=Gm_i\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j(\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i)}{\Delta_{ij}^3} \quad (j\neq i).$$

再对 i 求和，同(6)式一样，右端正好两两相消，总和为零。故由(3)式得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\xi_i\ddot{\eta}_i-\eta_i\ddot{\xi}_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i\frac{\partial U}{\partial \eta_i}-\eta_i\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right)=0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d}{dt}(\xi_i\dot{\eta}_i-\eta_i\dot{\xi}_i)=0.$$

积分后得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} m_i(\xi_i\dot{\eta}_i-\eta_i\dot{\xi}_i)=C_3,\\&\sum_{i=1}^{n} m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_i\dot{\eta}_i)=C_1,\\&\sum_{i=1}^{n} m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i-\xi_i\dot{\zeta}_i)=C_2.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

同理可得（见上式第二、三行）

(12)式也是方程組的 3 个积分，其中 C_1, C_2, C_3 为 3 个积分常数。这 3 个积分也有力学意义。

从理論力学知道，(12)式左端括弧內的量是天体 P_i 的面积速度在 3 个坐标平面上的投影，而且乘上质量 m_i 后，即为天体 P_i 的动量矩在 3 个坐标平面上的投影。因此，(12)式說明，n 体的动量矩在 3 个坐标平面上的投影总和为常数。也就是說，n 体系統的总动量矩为常数。这表示 n 体系統为保守系統，适合动量矩守恒定律，这正和事实相符合。

(12)式习惯上称为面积积分。

5. n 体系統既为保守系統，故能量守恒定律也应适合，由此又可得到一个积分。設 T 为 n 体的总动能，则

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2),$$

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\xi}_i\ddot{\xi}_i+\dot{\eta}_i\ddot{\eta}_i+\dot{\zeta}_i\ddot{\zeta}_i).$$

根据(3)式，把 $m_i\ddot{\xi}_i$, $m_i\ddot{\eta}_i$, $m_i\ddot{\zeta}_i$ 换为 U 的偏导数得

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\dot{\xi}_i+\frac{\partial U}{\partial \eta_i}\dot{\eta}_i+\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\dot{\zeta}_i\right)=\frac{dU}{dt},$$

积分后得 $T=U+C$，其中 C 为积分常数，即

$$T-U=C。\tag{13}$$

前面已討論，n 体的总位能为 $-U$，故(13)式正是能量守恒定律的反映，一般称为能量积分，C 称为能量常数。

6. 到現在为止，方程組已有 10 个积分，即 (8)，(9)，(12)，(13)式。而方程組(3)共有 $3n$ 个微分方程，每个方程为二阶，故整个方程組为 $6n$ 阶。若要完全解出，应該得出 $6n$ 个积分，其中包含 $6n$ 个相互独立的积分常数。即使在最簡单的情形 ($n=2$ 时，应有 12 个积分）也还差两个积分，在 $n=3$ 时，則差 8 个。因此，若要完全解决 n 体問題，就需要寻找除已知 10 个积分之外的新积分，可是事实却很不理想。

质量中心运动的 6 个积分，在牛頓的《自然哲学的数学原理》一书中已提出，其余 4 个积分是欧拉提出的。这都是 17 世紀末和 18 世紀初的事，以后很多年都未找到新的积分。到 1843 年，雅哥比曾証明：如果只差两个积分，其余的都已找出，則这两个积分也可以用特殊方法找出来。到 1887 年，勃隆斯(Bruns)在研究四体問題中証明❶：如果用直角坐标作变量，則沒有新的代数积分（即积分为变量的代数函数）。到 1889 年，潘加来在研究三体問題时証明❷：如果用軌道根数作变量，則新的单值超越积分也不存在。因此，除了二体問題因只差两个积分可以解决外，一般 n 体問題 ($n\geqslant 3$) 到現在都沒有解决，甚至連一个新的积分都沒有找到。可是 n 体問題是天体力学的基础理論，于是天文学家們不得不根据太阳系的特殊情况，附加一些条件，求它的近似解。对于这种特殊情况的天体，还建立了专門研究它們运动的理論，这些将在后面逐步介紹。

---

❶ 証明載于 Acta. Mathematica, Vol. XI.

❷ 証明載于 Acta. Mathematica, Vol. XIII.

§8 行星摄动运动的微分方程

克普勒三大定律所描述的行星运动非常簡单，虽然由万有引力定律給予了証明，但証明中只考虑到太阳和行星之間的吸引，也就是仅为二体問題。事实上，由于行星之間的相互吸引，行星运动的軌道是很复杂的。詳細討論将在后面第四、五章中去作，現在只是根据 n 体問題的方程导出行星运动的微分方程。

如果在§7 的 n 体問題中、P_n 为太阳；其他 $n-1$ 个天体为行星，我們来討論行星对太阳的相对运动。为了以后討論方便起見，需要以太阳为坐标原点。設行星 $P_i(i<n)$ 对太阳的坐标为 (x_i, y_i, z_i)，新的坐标軸 P_nx, P_ny, P_nz 与原来的 ξ, η, ζ 軸平行，則新旧坐标关系为

$$\xi_i = x_i + \xi_n, \quad \eta_i = y_i + \eta_n, \quad \zeta_i = z_i + \zeta_n. \tag{1}$$

(1)式中新旧坐标为綫性关系，且系数为 1，故 Δ_{ij} 对 ξ 等的偏导数与对 x 等的偏导数相同，而且

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}^2 &= (\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i-\eta_j)^2+(\zeta_i-\zeta_j)^2\\ &= (x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2.\end{aligned}$$

由(1-7-1)式知

$$\ddot{\xi}_i = G\frac{\partial}{\partial \xi_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j\neq i),$$

代入(1)式得

$$\ddot{x}_i+\ddot{\xi}_n = \ddot{\xi}_i = G\frac{\partial}{\partial \xi_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}} = -G\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j(x_i-x_j)}{\Delta_{ij}^3} \tag{2}$$

$$= G\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_n}{\Delta_{in}}\right)+G\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j\neq i). \tag{3}$$

因太阳为坐标原点，故 $x_n=y_n=z_n=0$. 在(2)式中令 $i=n$ 得

$$\ddot{\xi}_n = G\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_jx_j}{\Delta_{nj}^3} = G\frac{m_ix_i}{\Delta_{ni}^3}+G\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_jx_j}{\Delta_{nj}^3} \quad (j\neq i). \tag{4}$$

令 $r_j=\Delta_{nj}$ 为行星到太阳的距离，因太阳为坐标原点，故

$$r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2+z_j^2}.$$

以(4)式代入(3)式得

$$\ddot{x}_i+G\frac{m_i x_i}{r_i^3}+G\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_j x_j}{r_j^3}=-G\frac{m_n x_i}{r_i^3}+G\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_j}{\Delta_{ij}},$$

即

$$\ddot{x}_i+G\frac{m_i+m_n}{r_i^3}x_i=G\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_j}{\Delta_{ij}}-G\sum_{j=1}^{n-1}\frac{m_j x_j}{r_j^3}\qquad (j\neq i).\qquad (5)$$

若令

$$R_{ij}=Gm_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}}-\frac{x_i x_j+y_i y_j+z_i z_j}{r_j^3}\right),\qquad (6)$$

则(5)式成为

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_i+G\frac{m_i+m_n}{r_i^3}x_i=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i}\quad (j\neq i),\\
\text{同理}\quad&\ddot{y}_i+G\frac{m_i+m_n}{r_i^3}y_i=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial R_{ij}}{\partial y_i},\\
&\ddot{z}_i+G\frac{m_i+m_n}{r_i^3}z_i=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial R_{ij}}{\partial z_i}.
\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

(7)式即为行星相对于太阳运动的微分方程。如果 $R_{ij}=0$，则(7)式中只有太阳和所討論的行星之間的影响，即为二体問題；如 $R_{ij}\neq 0$，使行星运动同二体問題有差别，这种情况，我們称为摄动运动(或称扰动)，因此把函数 R_{ij} 称为摄动函数。在 $R_{ij}\neq 0$ 时討論行星的运动理論，称为摄动理論。

在討論行星运动时，除特殊情况外，一般都只考虑太阳和另一行星对所討論行星的影响，即为三体問題。所討論的行星称为被摄动行星，而把另一行星称为摄动行星。如以太阳为原点，令太阳质量等于1，被摄动行星和摄动行星的质量設为 m, m'，坐标各为 (x, y, z)，(x', y', z')，則被摄动行星的运动方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}+\frac{G(1+m)}{r^3}x=\frac{\partial R}{\partial x},\\
&\ddot{y}+\frac{G(1+m)}{r^3}y=\frac{\partial R}{\partial y},\\
&\ddot{z}+\frac{G(1+m)}{r^3}z=\frac{\partial R}{\partial z},\\
&R=Gm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),\\
&r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\\
&\Delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(8)
$$

(8)式为行星摄动运动的基本方程，它的解法将在后面第五章里讲述。

习 题

1. 若不考虑克普勒第二定律，只是在第一定律中，把太阳的位置改为位于长軸端点，则引力定律的形式怎样？若位于短軸端点，则又为怎样？若把行星軌道改为圆形，太阳位于圆周上，则引力定律的形式又为怎样？

2. 試証：均匀球壳对它内部一质点的引力为零。

3. 試証：两个等密度面为同心球壳的球形天体之間的吸引，可以把它們都看成质点，各位于自己的中心，质量与它們的总质量相等。

4. 試用严格数学方法証明：均匀椭球体对它的表面上一质点的吸引，引力加速度分量表达式与它对内点吸引的公式相同。

5. 設天体为圆环形，密度均匀，且厚度为无限小。試求出它对环平面上外面一质点吸引的位函数公式。

6. 若万有引力定律修改为：两质点間的引力与它們的质量成正比，与它們之間的距离的 m 次方成反比。試回答下列問題：(1) n 体問題的微分方程形式怎样？(2) n 体問題的 10 个已知积分中，哪些还成立？(3) 行星摄动运动方程的形式怎样？

第二章　二 体 問 題

在第一章中，我們已知 n 体問題还不能全部解出。而在太阳系中，行星的质量比太阳质量小得多(小于 0.001)，故行星相互之間的攝动也很小。因此，我們在討論行星运动时，可以在第一次近似中，先不考虑攝动，而只考虑太阳和行星之間的相互吸引，这就是二体問題。二体問題已能完全解决，这一章就讲这个内容。

§1　二体問題方程的积分

設太阳为坐标原点，质量为 1，所討論的行星 P 的质量为 m，坐标为 (x, y, z)，到太阳的距离为 r。現在討論无攝动运动，即在公式(1-8-8)中，运动方程右端 $R=0$。若令 $\mu=G(1+m)$，則行星运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=0,\\ \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=0,\\ \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

同前面討論 n 体問題一样，可以求(1)式的面积积分。由后两个式子可得

$$\ddot{y}z-y\ddot{z}=0,$$

积分得

$$y\dot{z}-z\dot{y}=A,\tag{2}$$

其中 A 为积分常数。同理可得

$$z\dot{x}-x\dot{z}=B, \tag{3}$$

$$x\dot{y}-y\dot{x}=C, \tag{4}$$

其中 B, C 也是积分常数。把(2), (3), (4) 各式分别乘以 x, y, z, 相加得

$$Ax+By+Cz=0, \tag{5}$$

这是通过太阳(原点)的一个平面方程。 也就是說，无擾动运动的軌道永远在一个平面上。

要具体定出这个平面，就要知道 A, B, C 的比值，即需要两个条件。如果用黄道坐标系，x 轴指向春分点，則利用行星軌道的升交点黄經 Ω 和傾角 i 可以求出 A, B, C 的比值。反之，若已知 A, B, C 的比值，也可求出 Ω, i, 它們之間的关系可用球面三角关系求出。

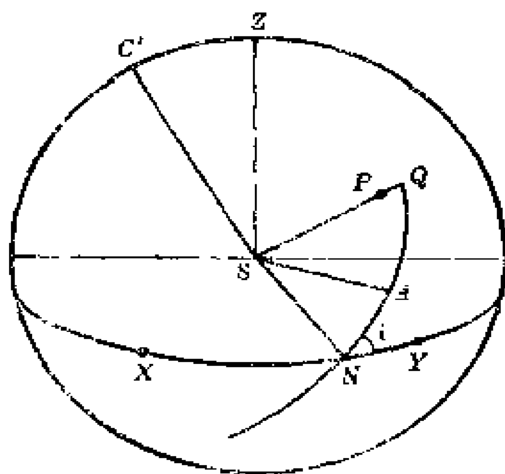


图 4

图 4 表示中心为太阳的天球。X 表示春分点，Z 表示北黄极，N 表示行星軌道升交点，NAQ 是行星軌道面在天球上所截的大圓，Q, A 分别表示行星 P 在时刻 t 和 τ 时的投影，C' 点表示大圓 NAQ 的极。$\Omega=XN$，行星軌道傾角 $i=C'Z$。

設 h 为行星向徑在单位时間内所扫过面积的两倍，即 $r^2\dot{\theta}=h$。也可以把 h 看成是一个垂直于軌道面的向量(动量矩向量)，即 $\vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}$；則 $\vec{h}$ 在 x-y 平面上的投影为 $x\dot{y}-y\dot{x}=C$，故 $C=h\cos C'Z$。同理，$B=h\cos C'Y$，$A=h\cos C'X$。但 $C'Z=i$，而 $C'X$, $C'Y$ 可用球面三角形 $C'XN$, $C'YN$ 中的关系确定：$\cos C'X=\sin\Omega\sin i$，$\cos C'Y=-\cos\Omega\sin i$。从而得

$$A = h\sin\Omega\sin i,\quad B = -h\cos\Omega\sin i,\quad C = h\cos i. \qquad (6)$$

故积分常数 A, B, C 可由 h, i, Ω 定出。反之，h, i, Ω 也可由 A, B, C 定出，即

$$h^2 = A^2 + B^2 + C^2,\quad \operatorname{tg}\Omega = -\frac{A}{B},\quad \operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}. \qquad (7)$$

既然行星在平面上运动，則用二維坐标就够了。即

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3}x = 0,\quad \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3}y = 0. \qquad (8)$$

用 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 把上式化成极坐标得

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \qquad (9)$$

$$r^2\dot{\theta} = h. \qquad (10)$$

令 $u = \dfrac{1}{r}$，代入上面两式，并以 θ 作自变量得(見第一章 § 1)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \qquad (11)$$

方程(11)的一般解为

$$u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \omega)],$$

其中 e, ω 为积分常数，且 $e > 0$. 于是

$$r = \frac{\dfrac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos(\theta - \omega)}. \qquad (12)$$

(12)式是行星的軌道方程，它表示一个圓錐曲綫。讲到这里，二体問題还不能算解决，因为二体問題的运动方程为 6 阶，完全解出后应該有 6 个积分，其中包含 6 个相互独立的积分常数。但是我們現在只有 5 个相互独立的积分常数，即 h, i, Ω(或 A, B, C), e, ω, 还有一个将在后面定出。另外，在討論一般的 n 体問題时，还有能量积分，可求出如下。

由(8)可得

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=-\mu\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r^3}=-\mu\frac{\dot{r}}{r^2},$$

积分得
$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{\alpha}\right),\tag{13}$$

其中 α 为积分常数，但这里 α 不是独立的，而是同 h, e 有关。

現在順便再推出一个积分，它不是新的积分，只是新的形式而已，在討論稳定性問題时要用到它。

在(1)式的后两式中，分别乘以 C, B 再相减得

$$C\ddot{y}-B\ddot{z}=\frac{\mu}{r^3}(Bz-Cy),$$

以(3)，(4)式的 B, C 代入得

$$\begin{aligned}C\ddot{y}-B\ddot{z}&=\frac{\mu}{r^3}[(z\dot{x}-x\dot{z})z-(x\dot{y}-y\dot{x})y]\\&=\frac{\mu}{r^3}[(x^2+y^2+z^2)\dot{x}-x(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})]\\&=\frac{\mu}{r^3}(r^2\dot{x}-xr\dot{r})\\&=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right).\end{aligned}$$

因此可积分得

$$C\dot{y}-B\dot{z}=\frac{\mu x}{r}-F_1.$$

F_1 为积分常数。上式可写为

同理
$$\left.\begin{aligned}B\dot{z}-C\dot{y}+\frac{\mu x}{r}&=F_1,\\C\dot{x}-A\dot{z}+\frac{\mu y}{r}&=F_2,\\A\dot{y}-B\dot{x}+\frac{\mu z}{r}&=F_3.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

(14)式就是要求得的关系，称为拉普拉斯积分。积分常数

F_1, F_2, F_3 不是独立的，而与 A, B C 有关。

§2 无摄动运动的一般性质

根据上节的討論，行星无摄动运动的軌道为圓錐曲綫。現在換成解析几何中的記号，令

$$p=a(1-e^2)=\frac{h^2}{\mu}, \tag{1}$$

則行星軌道方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)}, \tag{2}$$

其中 p 为圓錐曲綫的通徑，e 为偏心率，ω 为行星在某确定时刻 τ 时的极角，a 为主徑的一半。如果 $e<1$，則軌道为橢圓，a 为正；如果 $e=1$，則軌道为拋物綫，a 为无穷大；如果 $e>1$，則軌道为双曲綫，相应的 a 为負。

把(2)式和(1)式代入(2-1-13)式，可証明它的积分常数 $\alpha=a$。这在天文学教程下册中已証明了。

因此公式(2-1-13)成为

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right). \tag{3}$$

我們常称(3)式为活力积分。由此式可看出无摄动运动的一些性质：

1. 如果軌道为圓形，則 $r=a$，行星的速度为

$$v_c^2=\frac{\mu}{a}=\frac{\mu}{r}. \tag{4}$$

如果軌道为拋物綫，則 a 为无穷大，行星在距太阳 r 处的速度

$$v_p^2=\frac{2\mu}{r}. \tag{5}$$

由上可知

$$v_p^2:v_c^2=2:1 \text{ 或 } v_p:v_c=\sqrt{2}:1. \tag{6}$$

这就是説，若行星在同一地方，按抛物綫軌道运动的速度等于按圓形軌道运动速度的$\sqrt{2}$倍。

2．由(3)式可知行星的速度大小决定了行星的軌道，可用抛物綫軌道的速度作为判別标准。

(1) 如果行星速度$v^2<v_p^2$，則由(3)式知 $\frac{1}{a}>0$，卽a为正値，故軌道为橢圓(或圓)。

(2) 如果行星速度$v^2=v_p^2$，則 $\frac{1}{a}=0$，a为无穷大，軌道为抛物綫。

(3) 如果行星速度$v^2>v_p^2$，則由(3)式知 $\frac{1}{a}<0$，卽a为負値，故軌道为双曲綫。

3．如果行星的运动速度$v^2<v_p^2$，軌道是橢圓，它的半长徑a可用速度v的数値完全确定，同速度的方向无关。也就是説，如果行星在距太阳r处，用同一速率，但以不同方向运动，則橢圓軌道的半长徑应相等。再根据克普勒第三定律(将在下节証明)，它們的周期也应相同。故若在同一地方同时用同一速率但不同方向把一些物体抛出去，則它們应同时回到原来的地方。

§3 橢圓运动

如果行星軌道为橢圓，則方程为

$$r=\frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos(\theta-\omega)}, \tag{1}$$

其中
$$\frac{h^2}{\mu}=p=a(1-e^2),$$

故
$$h^2=\mu a(1-e^2). \tag{2}$$

但h为面积速度的兩倍，由公式(1-1-7)知

$$h=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T},\tag{3}$$

其中 T 为运动周期。比較(2)，(3)两式得

$$\mu=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}.$$

这里的 $\mu=G(1+m)$（設太阳的质量为 1），故得

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\mu}{4\pi^2}=\frac{G(1+m)}{4\pi^2}.\tag{4}$$

(4)式右端包含行星质量 m，对不同行星而言有不同的值，故不能为常数，即克普勒第三定律需要加以修正。

现在来討論二体問題的最后一个积分(在軌道为椭圓的情形)。由于

$$r^2\dot{\theta}=h=\sqrt{\mu a(1-e^2)},$$

$$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

两式中消去 $\dot{\theta}$ 得

$$\dot{r}^2+\frac{\mu a(1-e^2)}{r^2}=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),\tag{5}$$

故

$$\dot{r}^2=\frac{\mu}{r^2a}[a^2e^2-(a-r)^2].\tag{6}$$

如用 n 表示行星的平均角速度，则 $n=\frac{2\pi}{T}$，由(4)得

$$n=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\mu}\,a^{-\frac{3}{2}},\tag{7}$$

代入(6)式得

$$\dot{r}^2=\frac{a^2n^2}{r^2}[a^2e^2-(a-r)^2],$$

即

$$ndt=\frac{r}{a}\cdot\frac{dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.\tag{8}$$

为积分方便起見，令

$$a-r=ae\cos E,$$

即

$$r=a(1-e\cos E_1),\tag{9}$$

則(8)式成为

$$n\,dt=(1-e\cos E)\,dE,$$

积分得

$$E-e\sin E=nt+C.\tag{10}$$

这就是最后一个积分，其中 C 为积分常数。

方程(10)称为克普勒方程，关于它的意义和解法将在下面讲。

这6个积分常数可以换成行星軌道根数。如果天体的軌道根数都已知道，則可根据它們求出行星在任何时刻的位置。軌道根数中 i, Ω, ω 3个量决定行星軌道平面和长軸在空間的位置(見图5)，而 a, e, τ 3个量則可求出行星在任何时刻在軌道上的位置，只是其中解克普勒方程

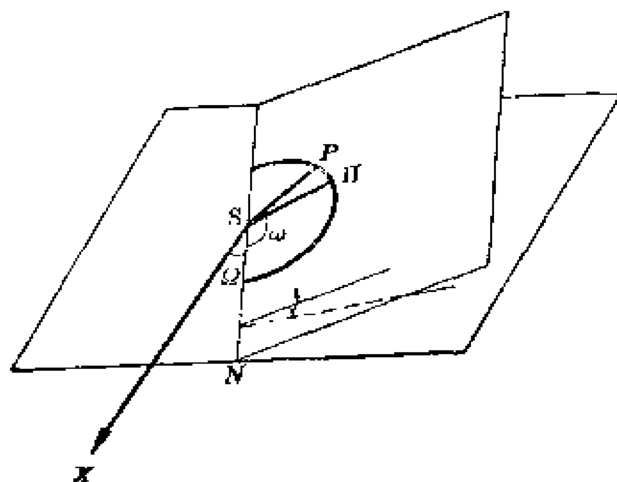


图 5

$$E-e\sin E=nt+C=n(t-\tau).\tag{11}$$

§4 抛物綫和双曲綫运动

1．如行星軌道为抛物綫，則 a 为无穷大，$e=1$，故軌道方程和面积积分为

$$r^2\dot{\theta}=\sqrt{\mu p};\tag{1}$$

$$r=\frac{p}{1+\cos(\theta-\omega)}.\tag{2}$$

象椭圓运动一样，ω 也是近日点的极角。为簡单起見，使极軸与近日点方向重合。令

$$f=\theta-\omega,\tag{3}$$

則行星軌道方程为

$$r=\frac{p}{1+\cos f},$$

其中 p 为通徑。但由解析几何知，$q=S\Pi$（图 6，Π 为近日点）应等于 p 的一半，故軌道方程可写为

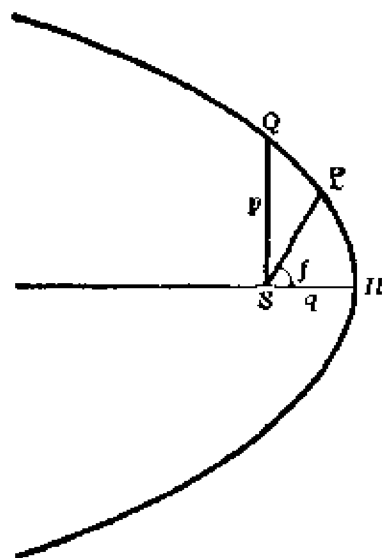


图 6

$$r=\frac{2q}{1+\cos f}=q\sec^2\frac{f}{2}.\tag{4}$$

根据(3)式

$$\dot f=\dot\theta,\tag{5}$$

故(1)式成为

$$r^2\dot f=\sqrt{2\mu q}.\tag{6}$$

以(4)式代入(6)式得

$$\sec^4\frac{f}{2}\,df=\sqrt{2\mu}\,q^{-\frac{3}{2}}\,dt.$$

积分得

$$2\,\mathrm{tg}\,\frac{f}{2}+\frac{2}{3}\,\mathrm{tg}^3\,\frac{f}{2}=\sqrt{2\mu}\,q^{-\frac{3}{2}}(t-\tau),\tag{7}$$

其中 τ 为积分常数，同前面椭圓运动一样，它也是行星經过近日点的时刻。因此拋物綫軌道的根数只有 5 个：Ω, i, ω, q, τ。根据它們也可以求出行星在任何时刻的位置，但是在計算过程中需要解出(7)式中的 f。

2. 拋物綫运动还有一个性质，在軌道計算中要用到，現推导如下。

設行星在时刻 t_1, t_2 时分别位于 p_1 和 p_2，坐标为 (r_1, f_1) 和 (r_2, f_2)（图 7）。由(7)式得

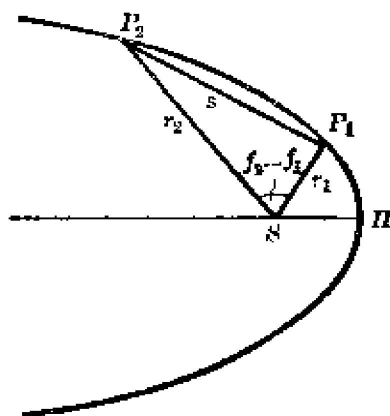


图 7

$$\sqrt{2\mu}\,q^{-\frac{3}{2}}(t_2-\tau)=2\,\mathrm{tg}\,\frac{f_2}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3\frac{f_2}{2},$$

$$\sqrt{2\mu}\,q^{-\frac{3}{2}}(t_1-\tau)=2\,\mathrm{tg}\,\frac{f_1}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3\frac{f_1}{2}.$$

两式相减得

$$\sqrt{2\mu}\,q^{-\frac{3}{2}}(t_2-t_1)$$

$$=2\left(\mathrm{tg}\,\frac{f_2}{2}-\mathrm{tg}\,\frac{f_1}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\mathrm{tg}^3\frac{f_2}{2}-\mathrm{tg}^3\frac{f_1}{2}\right),$$

即

$$\frac{3\sqrt{\mu}(t_2-t_1)}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}}=\left(\mathrm{tg}\,\frac{f_2}{2}-\mathrm{tg}\,\frac{f_1}{2}\right)\left[3\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{f_1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{f_2}{2}\right)+\left(\mathrm{tg}\,\frac{f_2}{2}-\mathrm{tg}\,\frac{f_1}{2}\right)^2\right]. \tag{8}$$

設 P_2, P_1 間的弦长为 s，則由三角形 SP_1P_2 知

$$s^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(f_2-f_1)$$

$$=(r_1+r_2)^2-4r_1r_2\cos^2\frac{f_2-f_1}{2}.$$

由此得

$$2\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{f_2-f_1}{2}=\pm\sqrt{(r_1+r_2+s)(r_1+r_2-s)}, \qquad (9)$$

其中正負号由 f_2-f_1 的象限而定，f_2-f_1 在 0 到 π 之間时为正，在 π 到 2π 之間时为負。

再由(4)得

$$r_1=q\sec^2\frac{f_1}{2}, \quad r_2=q\sec^2\frac{f_2}{2}, \qquad (10)$$

代入(9)式左端得

$$1+\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}=\pm\frac{\sqrt{(r_1+r_2+s)(r_1+r_2-s)}}{2q}. \qquad (11)$$

又由(10)直接得

$$\begin{aligned} r_1+r_2&=q\left(\sec^2\frac{f_1}{2}+\sec^2\frac{f_2}{2}\right)\\ &=q\left(2+\operatorname{tg}^2\frac{f_1}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{f_2}{2}\right). \end{aligned} \qquad (12)$$

从(11)，(12)知

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}\right)^2&=\frac{r_1+r_2\mp\sqrt{(r_1+r_2+s)(r_1+r_2-s)}}{q}\\ &=\frac{(r_1+r_2+s)+(r_1+r_2-s)\mp2\sqrt{(r_1+r_2+s)(r_1+r_2-s)}}{2q}, \end{aligned} \qquad (13)$$

即

$$\operatorname{tg}\frac{f_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}=\frac{\sqrt{(r_1+r_2+s)}\mp\sqrt{(r_1+r_2-s)}}{\sqrt{2q}}. \qquad (14)$$

以(11)，(13)，(14)式代入(8)得

$$6\sqrt{\mu}\,(t_2-t_1)=(r_1+r_2+s)^{\frac{3}{2}}\mp(r_1+r_2-s)^{\frac{3}{2}}. \qquad (15)$$

这就是要求的式子，其中不含 q，是行星在两时刻的向徑和弦之間的关系。(15)式是由欧拉发現的，故称为欧拉方程。

3. 如果行星运动軌道为双曲綫，則 $e>1$，a 为負。令 $a_1=-a$，

则基本式子为

$$\left.\begin{aligned} r^2\dot{\theta}=h=\sqrt{\mu a_1(e^2-1)}\,, \\ \dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=v^2=\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a_1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

消去 $\dot{\theta}$ 得

$$a_1\,\nu\,dt=\frac{r\,dr}{\sqrt{(a_1+r)^2-a_1^2e^2}}, \tag{17}$$

其中

$$\nu=\sqrt{\mu}\,a_1^{-\frac{3}{2}}.$$

为积分方便起見，定义輔助量 F 为

$$a_1+r=a_1e\cosh F,$$

即

$$r=a_1(e\cosh F-1), \tag{18}$$

代入(17)式得

$$\nu\,dt=(e\cosh F-1)\,dF.$$

积分得

$$\nu(t-\tau)=e\sinh F-F. \tag{19}$$

其中 τ 是积分常数。同在椭圆运动中一样，可以証明 τ 也是行星过近日点时刻。因此双曲軌道的根数和椭圓相同，即

$$i,\ \Omega,\ e,\ \omega,\ a,\ \tau.$$

用它們可以求任何时刻行星的位置，只是先要解(19)式，它和克普勒方程形式相仿。下面就来談它的解法。

§5 克普勒方程和它的各种解法

椭圆运动中要計算出行星的位置，必須要解克普勒方程，即公式(2–3–10)。其中輔助量 E 的几何意义，可參考天文学教程下册，这里只用图表示出来(图8)。角 E 称为偏近点角，而角 $f=\theta-\omega$ 称为真近点角。若用

$$M = n(t-\tau) \tag{1}$$

表示行星由近日点开始按平均角速度运动所走过的角度，故称为**平近点角**。可用(1)式求出它在任何时刻的值。因此，克普勒方程常写成

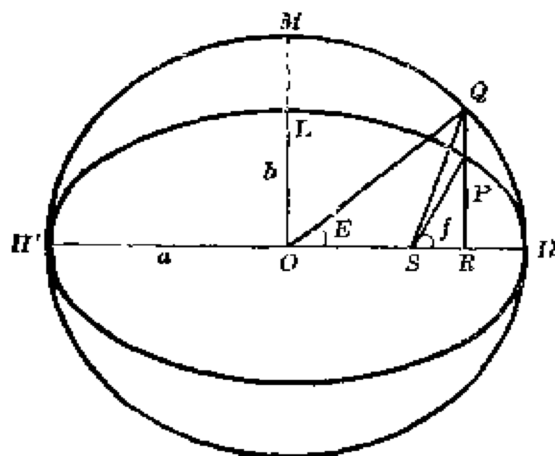


图 8

$$M = E - e\sin E. \tag{2}$$

解这个方程的目的，就是要根据已知的 M 求出 E。这是一个超越方程，不能用普通的代数方法求解。关于这个方程的解的存在性，大家在高等数学中已知道了。它的解法很多，現在只提出几种常用的方法。

一、逐步近似法

如果偏心率 e 不大，则 $e\sin E$ 較小，故 E 和 M 很接近，可取 E 的第一次近似值为 M。若設 E_i 为第 i 次近似，则由(2)式知

$$E = M + e\sin E.$$

取

$$\left.\begin{aligned} &E_1 = M, \\ &E_2 = M + e\sin E_1, \\ &E_3 = M + e\sin E_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &E_i = M + e\sin E_{i-1}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

一直算到 $E_i = E_{i-1}$ 时（在所要求的精确度内）才算完成。注意这里的 E 和 M 都应該用弧度作单位。用角度做单位也可以，但需要把 e 乘上一弧度的角度数 57.29577591 記为

$$e^\circ = e \times 57.29577591,$$

则
$$E=M+e^{\circ}\sin E.$$

如果偏心率 e 較大，則近似的次数增多，可用其他方法求出較准确的 E 作为第一次近似値。在某些书中❶❷載有 M 和 E 的表，可查表得到 E 的第一次近似值。

二、微分改正法

同上面一样，如已查表得到 E 的第一次近似值 E_1，由克普勒方程可算出相应的 M_1
$$M_1=E_1-e\sin E_1.$$
但实际的 M 和 M_1 不同。令
$$\Delta M_1=M-M_1,$$
把 M 看作 E 的函数，并把 ΔM_1 看为 M 的微分增量，則 E 有一相应的增量 ΔE，可用泰勒級数来求出。令
$$M=E-e\sin E=f(E),$$
$$\begin{aligned}M=M_1+\Delta M_1&=f(E_1+\Delta E)\\&=f(E_1)+f'(E_1)\Delta E+\cdots\\&=M_1+(1-e\cos E_1)\Delta E+\cdots.\end{aligned}$$
如果右端只取到 ΔE 的一次項，記为 ΔE_1，即
$$\Delta E_1(1-e\cos E_1)=M-M_1=\Delta M_1,$$
故
$$\Delta E_1=\frac{\Delta M_1}{1-e\cos E_1}. \tag{4}$$
由此得 E 的第二次近似值 $E_2=E_1+\Delta E_1$；同样継續可求相应的 ΔM_2，再由
$$\Delta E_2=\frac{\Delta M_2}{1-e\cos E_2}$$
求出 ΔE_2，得到 E 的第三次近似值 $E_3=E_2+\Delta E_2$。如此継續作下

---

❶ Дубяго 著：Определение Орбит，附表。

❷ Stracke 著：Bahnbestimmung der Planeten und Kometen，附表。

去，直到 ΔM 在所取的精确度下等于零时为止。如果第一次近似值取得好，只要作很少的几次就行了。在根据 E 求 M 时要注意单位問題，所取单位与方法 1 中所說的相同。

三、勒朗法

在克普勒方程中，令

$$x=e\sin E,$$

则

$$\left.\begin{aligned}x&=e\sin E,\\ E&=M+x,\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

故得

$$x=e\sin(M+x).\tag{6}$$

由

$$\begin{aligned}\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\\ &=e\sin(M+x)-\frac{e^3}{6}\sin^3(M+x)\\ &\quad+\frac{e^5}{120}\sin^5(M+x)-\cdots,\end{aligned}\tag{7}$$

即

$$\begin{aligned}&\sin x(1-e\cos M)-e\sin M\cos x\\ &=-\frac{e^3}{6}\sin^3(M+x)+\frac{e^5}{120}\sin^5(M+x)-\cdots,\end{aligned}\tag{8}$$

定义 C, x_0 为

$$\left.\begin{aligned}C\sin x_0&=e\sin M,\\ C\cos x_0&=1-e\cos M,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

即

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}x_0&=\frac{e\sin M}{1-e\cos M},\\ C&=\sqrt{1-2e\cos M+e^2}.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

由(10)式可求出 C 和 x_0. 以(9)式代入(8)得

$$\begin{aligned}\sin(x-x_0)&=-\frac{e^3}{6C}\sin^3(M+x)\\ &\quad+\frac{e^5}{120C}\sin^5(M+x)-\cdots,\end{aligned}\tag{11}$$

取 x 的第一次近似值为 x_1，則

$$\sin(x_1 - x_0) = -\frac{e^3}{6C}\sin^3(M + x_0). \tag{12}$$

但由(9)式得

$$\sin x_0(1 - e\cos M) = e\cos x_0 \sin M,$$

即
$$\sin x_0 = e\sin(M + x_0),$$

代入(12)得

$$\sin(x_1 - x_0) = -\frac{1}{6C}\sin^3 x_0. \tag{13}$$

由此可以很容易解出 x_1，則 E 的近似值取为

$$E_1 = M + x_1.$$

同样継續可求第二次近似值 x_2。由

$$\sin(x_2 - x_0) = -\frac{e^3}{6C}\sin(M + x_1) + \frac{e^5}{120C}\sin^5(M + x_0),$$

則得第二次的近似值 $E_2 = M + x_2$。如果 e 的值很小，則二次近似就可以了，如 e 較大，把所得的値作为第一次近似值，再用前面两个方法去作。

四、图解法

在 e 較大时，可用图解法来求第一次近似值。把克普勒方程写成

$$\frac{1}{e}(E - M) = \sin E,$$

則它的解是联立方程

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin E, \\ y &= \frac{1}{e}(E - M) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

的解。把上面两式按 E 为自变量繪出曲綫，則它們的交点卽为克普勒方程的解。

图 9 中的第一个曲綫卽为正弦曲綫，和 e, M 的值无关，可在

坐标紙上先画出来。如 y 用角度作单位则要乘上 57.295977…，y 的最大值就是 $57^\circ.295977\cdots$。

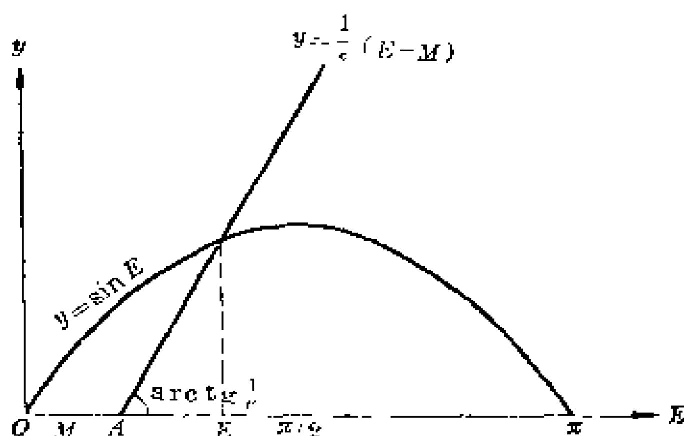


图 9

第二个曲綫为直綫，斜率为 $\frac{1}{e}$，在 E 軸上的交点 A 的坐标是 $OA=M$，故很容易繪出。如果 E，M 都用角度作单位，則 y 的单位也是角度，就不必改变 e 了。所得交点的横坐标即为所求的 E 值。

直綫的图形可不必繪出，用一直尺的一端放在 A 上($OA=M$)旋轉它使得同 E 軸所成的交角等于 arc tg $\frac{1}{e}$，再看直尺和正弦曲綫的交点横坐标就行了。

在双曲綫运动中，也要解类似的方程，可以先用图解法求两曲綫的交点。如令

$$N=\nu(t-\tau), \tag{15}$$

則两曲綫为

$$\left.\begin{aligned} &y=\sinh F, \\ &y=\frac{1}{e}(F+N). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

第一曲綫为双曲綫函数，作法与上述相同。

§6 計算橢圓运动的坐标

1．在§3中我們已得到了計算行星位置的輪廓，現在先來計算行星在橢圓軌道上的极坐标(r, f)。設橢圓方程为

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}. \tag{1}$$

由§2中我們有

$$r=a(1-e\cos E), \tag{2}$$

而其中偏近点角 E 可根据克普勒方程

$$E-e\sin E=M=n(t-\tau) \tag{3}$$

解出。根据解(3)式所得的 E，代入(2)式可求出 r，再把 r 代入(1)求出 f。

用(1)式求 f，在計算上有許多不便，因此需把上面的公式轉化，使得可以直接由 E 来求 f。轉化后得

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{4}$$

因 $\frac{E}{2}$ 与 $\frac{f}{2}$ 同象限，用(4)式計算 f 就很方便。

2．已知 r, f，則行星在軌道面上的直角坐标就很容易求出。如果在行星軌道面上，取太阳向近日点的方向为 ξ 軸，$f=90°$ 的方向为 η 軸（图10），則行星坐标(ξ, η)为

$$\left.\begin{aligned}\xi&=r\cos f,\\ \eta&=r\sin f.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

行星坐标还可以直接由 E 計算。經推导得

$$\left.\begin{aligned}\xi&=r\cos f=a(\cos E-e),\\ \eta&=r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

3．因二体問題最初是以日心黃道直角坐标(x, y, z)出发，若要完全解出，应該求出它們的計算公式。

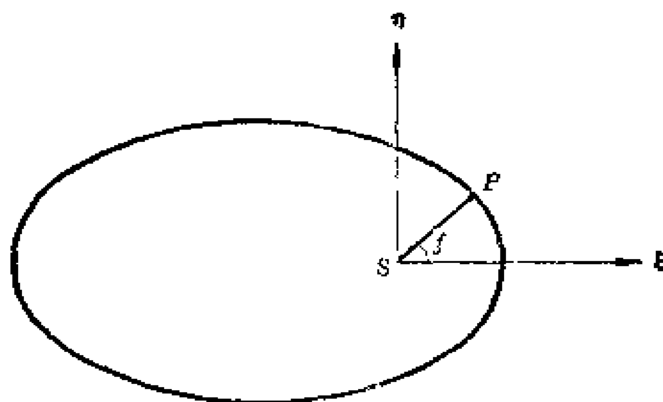


图 10

設图 11 表示天球，中心 S 为太阳位置；N 为軌道对黄道的升交点；X 为春分点方向；$SXYZ$ 为日心黄道坐标系，Π 表示行星軌道近日点的投影，P 为行星在时刻 t 时的位置的投影，C 表示行星軌道面的极。

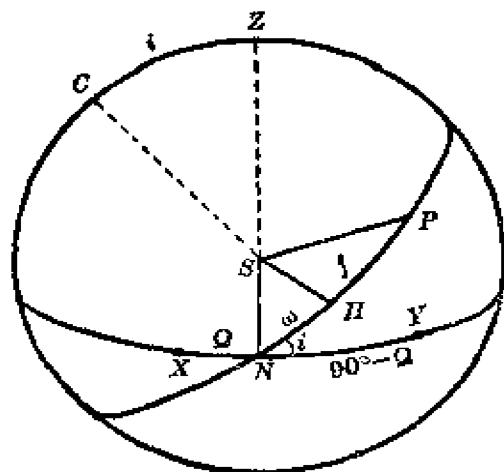


图 11

行星的日心黄道坐标 (x, y, z) 就是行星向徑 r 在三个坐标軸上的投影，即

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\widehat{PX}, \\ y &= r\cos\widehat{PY}, \\ z &= r\cos\widehat{PZ}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

但由图 11 知，$\cos\widehat{PX}$，$\cos\widehat{PY}$，$\cos\widehat{PZ}$ 可以由各已知量根据球面三角公式求出。可得

$$\cos\widehat{PX} = \cos\Omega\cos(\omega+f) - \sin\Omega\sin(\omega+f)\cos i,$$

$$\cos\widehat{PY} = \sin\Omega\cos(\omega+f) + \cos\Omega\sin(\omega+f)\cos i,$$

$$\cos\widehat{PZ} = \sin(\omega+f)\sin i.$$

把上面三个式子代入(7)式得

$$\left.\begin{aligned} x&=r[\cos\Omega\cos(\omega+f)-\sin\Omega\sin(\omega+f)\cos i],\\ y&=r[\sin\Omega\cos(\omega+f)+\cos\Omega\sin(\omega+f)\cos i],\\ z&=r\sin(\omega+f)\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

故 x, y, z 可根据 r, f 算出，而 r, f 已在前面求出了。事实上，上式也可以轉化成直接用偏近点角 E 計算的式子。即

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1a(\cos E-e)+l_2a\sqrt{1-e^2}\sin E,\\ y&=m_1a(\cos E-e)+m_2a\sqrt{1-e^2}\sin E,\\ z&=n_1a(\cos E-e)+n_2a\sqrt{1-e^2}\sin E, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos i,\\ m_1&=\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos i,\\ n_1&=\sin\omega\sin i; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} l_2&=-\cos\Omega\sin\omega-\sin\Omega\cos\omega\cos i,\\ m_2&=-\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega\cos i,\\ n_2&=\cos\omega\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

于是問題全部解决。

§7 計算拋物綫和双曲綫运动的坐标

1. 在§4中，我們得到了拋物綫运动的基本方程

$$r=\frac{p}{1+\cos f}=q\sec^2\frac{f}{2}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{f}{2}=\frac{\sqrt{\mu}(t-\tau)}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

(2)式右端为已知量，可以解出 f，再由(1)式求 r。解(2)式很麻煩，已有人計算好 f 値表[1]。

---

[1] Stracke 著: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 附表。

令

$$(t-\tau)q^{-\frac{3}{2}}=M, \tag{3}$$

可根据 M 的值直接查表得到 f.

如要直接計算 f，可用下面的方法。令

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=2\operatorname{ctg}2w=\operatorname{ctg}w-\operatorname{tg}w,$$

故
$$\operatorname{tg}^3\frac{f}{2}=\operatorname{ctg}^3 w-\operatorname{tg}^3 w-3(\operatorname{ctg}w-\operatorname{tg}w),$$

代入(2)得

$$\operatorname{ctg}^3 w-\operatorname{tg}^3 w=\frac{3\sqrt{\mu}\,(t-\tau)}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}}.$$

令

$$\frac{3\sqrt{\mu}\,(t-\tau)}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}}=2\operatorname{ctg}S, \tag{4}$$

則由上式得

$$\operatorname{ctg}w=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{S}{2}}. \tag{5}$$

由(5)式可求出 w，再由

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=2\operatorname{ctg}2w \tag{6}$$

求出 f.

与椭圆运动情形一样，知道了(r, f)以后，就可以求出它們的日心黄道直角坐标

$$\left.\begin{aligned}
x&=r[\cos\Omega\cos(\omega+f)-\sin\Omega\sin(\omega+f)\cos i],\\
y&=r[\sin\Omega\cos(\omega+f)+\cos\Omega\sin(\omega+f)\cos i],\\
z&=r\sin(\omega+f)\sin i.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

2. 根据双曲綫运动的基本公式(参看§4)

$$r=\frac{a_1(e^2-1)}{1+e\cos f} \tag{8}$$

或

$$r = a_1(e\cosh F - 1),\tag{9}$$

可以推出一个直接用 F 計算 f 的式子．因为同椭圆运动一样，根据(9)式求出 r 后，再由(8)式求 f 是很麻煩的。这里的 F 可用类似克普勒方程

$$\nu(t-\tau) = e\sinh F - F\tag{10}$$

得出，(9)式左端的量也可以令它等于 M，相当于平近点角。

由(8)，(9)两式得

$$\frac{(e^2-1)}{1+e\cos f} = e\cosh F - 1,$$

可解出

$$\cos f = \frac{e-\cosh F}{e\cosh F - 1}.\tag{11}$$

利用(11)式，就可以根据 F 計算 f 了，但这仍然很煩，可再进行簡化。由(11)可得

$$1+\cos f = \frac{(e-1)(\cosh F+1)}{e\cosh F - 1},$$

$$1-\cos f = \frac{(e+1)(\cosh F-1)}{e\cosh F - 1},$$

故得 $$\mathrm{tg}^2\frac{f}{2} = \frac{1-\cos f}{1+\cos f} = \frac{e+1}{e-1}\cdot\frac{\cosh F-1}{\cosh F+1}.$$

根据双曲綫函数的特性，右端的函数可化为

$$\frac{e+1}{e-1}\tanh^2\frac{F}{2},$$

故得

$$\mathrm{tg}\,\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\frac{F}{2}.\tag{12}$$

由(12)式根据 F 求 f 就很方便了。

有了(r, f)，同§6中一样，可以直接計算日心黄道直角坐标

$$\left.\begin{aligned}x&=r[\cos\Omega\cos(\omega+f)-\sin\Omega\sin(\omega+f)\cos i],\\y&=r[\sin\Omega\cos(\omega+f)+\cos\Omega\sin(\omega+f)\cos i),\\z&=r\sin(\omega+f)\sin i.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

§8 計算星历表的基本方程

前面几节已把二体問題的解法讲完了，現在就要利用它們来計算行星的星历表，也就是要求行星的視位置——赤經 α 和赤緯 δ，这里是假設行星的軌道根数为已知，至于如何計算出軌道根数，那是第三章所要讲的内容。

在§6，§7中，已讲过如何計算行星的日心黄道直角坐标 (x, y, z)，这里只写出它們的結果。

$$\left.\begin{aligned}x&=rl_1\cos f+rl_2\sin f,\\y&=rm_1\cos f+rm_2\sin f,\\z&=rn_1\cos f+rn_2\sin f,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}l_1&=\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos i,\\m_1&=\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos i,\\n_1&=\sin\omega\sin i;\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}l_2&=-\cos\Omega\sin\omega-\sin\Omega\cos\omega\cos i,\\m_2&=-\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos\omega\cos i,\\n_2&=\cos\omega\sin i.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

这些方程对三种軌道都能适用。下面就根据它們来推出計算星历表的方程。

一、計算日心黄經和黄緯 (l, b)

因 (x, y, z) 为日心黄道直角坐标，利用直角坐标和球面坐标的关系可得

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos l\cos b,\\ y&=r\sin l\cos b,\\ z&=r\sin b,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

因此

$$\operatorname{tg} l=\frac{y}{x},\quad \sin b=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\tag{5}$$

由(5)式可求出(l, b)，其中l的象限根据(x, y)的符号来确定。由(4)式的前两式容易看出：

x 的 符 号	+	+	−	−
y 的 符 号	+	−	+	−
l 的 象 限	I	IV	II	III

b没有象限問題，与z同号。在天文年历中需要写明行星的(l,b)。

二、計算地心黃經黃緯(λ, β)

在計算时需要把坐标原点平移到地球的中心。設在日心黄道坐标系中，用(x_0, y_0, z_0)，(r_0, l_0, b_0)分别表示地球的直角坐标和球坐标，则有

$$\left.\begin{aligned} x_0&=r_0\cos l_0\cos b_0,\\ y_0&=r_0\sin l_0\cos b_0,\\ z_0&=r_0\sin b_0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

再設(ξ, η, ζ)表示行星的地心黄道直角坐标，ρ是行星的地心距离，则根据坐标变换原理可得

$$\left.\begin{aligned} x&=\xi+x_0 \quad 或 \quad \xi=x-x_0;\\ y&=\eta+y_0 \quad 或 \quad \eta=y-y_0;\\ z&=\zeta+z_0 \quad 或 \quad \zeta=z-z_0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

如果再設$(x_\odot, y_\odot, z_\odot)$，$(r_\odot, l_\odot, b_\odot)$表示太阳的地心黄道直角坐标和球坐标，则得

$$l_{\odot}=l_0+180°, \quad b_{\odot}=-b_0.$$

于是

$$\left.\begin{aligned} x_{\odot}&=r_0\cos l_{\odot}\cos b_{\odot}=-x_0,\\ y_{\odot}&=r_0\sin l_{\odot}\cos b_{\odot}=-y_0,\\ z_{\odot}&=r_0\sin b_{\odot}=-z_0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

故(7)式成为

$$\left.\begin{aligned} \xi&=x+x_{\odot}=x+r_0\cos l_{\odot}\cos b_{\odot},\\ \eta&=y+y_{\odot}=y+r_0\sin l_{\odot}\cos b_{\odot},\\ \zeta&=z+z_{\odot}=z+r_0\sin b_{\odot}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中$(l_{\odot}, b_{\odot})$和r_0的值在天文年历上都已載出，因此可根据(x, y, z)很容易算出(ξ, η, ζ)。而太阳的黄緯$b_{\odot}$很小，一般不超过$1''$，故在不太精确的計算中，可以假定$b_{\odot}=0$，(9)式就变得更简单。

算出了(ξ, η, ζ)后，行星的黄道球坐标(ρ, λ, β)就由关系

$$\left.\begin{aligned} \xi&=\rho\cos\lambda\cos\beta,\\ \eta&=\rho\sin\lambda\cos\beta,\\ \zeta&=\rho\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

很容易算出来。实际上，由上式可知

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\lambda=\frac{\eta}{\xi}, \quad \sin\beta=\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},\\ &\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

关于(λ, β)的象限和符号，决定方法与(l, b)相同。

三、計算赤經和赤緯

知道了地心黄經黄緯(λ, β)后，行星的赤經赤緯(α, δ)就容易求出了。由球面天文学可知

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha&=\cos\beta\cos\lambda,\\ \cos\delta\sin\alpha&=-\sin\beta\sin\varepsilon+\cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda,\\ \sin\delta&=\cos\varepsilon\sin\beta+\sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

用計算机計算时就用这个公式。α 的象限根据右端的符号决定。若令(12)式右端的三个数值依次为 a_1, a_2, a_3,则有

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a_2}{a_1},\quad \sin\delta=a_3,$$

α 的象限就根据 a_2, a_1 的符号决定,决定方法与 l 相同,只是把 a_2 看成 y, a_1 看成 x 就行了。δ 的符号与 a_3 相同。

如果要用对数方法进行計算,可引入輔助量 n^*, N^*

$$\left.\begin{aligned} n^*\sin N^* &= \sin\beta, \\ n^*\cos N^* &= \cos\beta\sin\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

代入(12)得

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda, \\ \cos\delta\sin\alpha &= n^*\cos(N^*+\varepsilon), \\ \sin\delta &= n^*\sin(N^*+\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(13), (14)都是乘积,用对数計算很方便。

四、从赤道直角坐标求赤經和赤緯

因(x, y, z)为行星的日心黄道直角坐标,坐标軸 X 指向春分点,Y 軸指向黄道面上黄經等于 90° 的地方,Z 軸指向北黄极。現在我們把它换成为赤道直角坐标系(X', Y', Z'),X' 軸与 X 軸重合,Y' 軸在赤道面上指向赤經等于 90° 的地方,Z' 軸指向北天极。因为黄道对赤道的傾角为 ε,所以这个变换就好象是使旧坐标系中的 X 軸固定,把

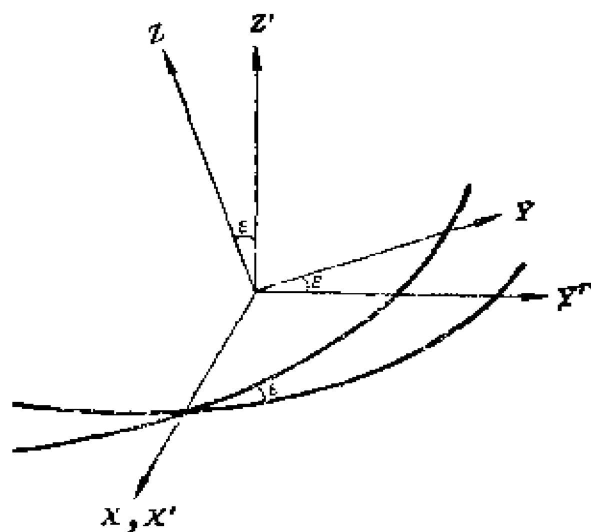


图 12

YZ 平面按順时針方向旋轉了 ε 角（图 12）。根据坐标变换原理，行星的新坐标(x', y', z')应为

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon, \\ z' &= y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

以(1)式代入得

$$x' = rl_1\cos f + rl_2\sin f,$$

$$y' = r(m_1\cos\varepsilon - n_1\sin\varepsilon)\cos f + r(m_2\cos\varepsilon - n_2\sin\varepsilon)\sin f,$$

$$z' = r(m_1\sin\varepsilon + n_1\cos\varepsilon)\cos f + r(m_2\sin\varepsilon + n_2\cos\varepsilon)\sin f.$$

引入輔助量 P_x, P_y, P_z 和 Q_x, Q_y, Q_z, 上式轉化成

$$\left.\begin{aligned} x' &= rP_x\cos f + rQ_x\sin f, \\ y' &= rP_y\cos f + rQ_y\sin f, \\ z' &= rP_z\cos f + rQ_z\sin f, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} P_x &= l_1 = \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i, \\ Q_x &= l_2 = -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i, \\ P_y &= m_1\cos\varepsilon - n_1\sin\varepsilon \\ &= (\sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i)\cos\varepsilon \\ &\quad - \sin\omega\sin i\sin\varepsilon, \\ Q_y &= m_2\cos\varepsilon - n_2\sin\varepsilon \\ &= (\cos\Omega\cos\omega\cos i - \sin\Omega\sin\omega)\cos\varepsilon \\ &\quad - \cos\omega\sin i\sin\varepsilon, \\ P_z &= m_1\sin\varepsilon + n_1\cos\varepsilon \\ &= (\sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i)\sin\varepsilon \\ &\quad + \sin\omega\sin i\cos\varepsilon, \\ Q_z &= m_2\sin\varepsilon + n_2\cos\varepsilon \\ &= (\cos\Omega\cos\omega\cos i - \sin\Omega\sin\omega)\sin\varepsilon \\ &\quad + \cos\omega\sin i\cos\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

由(17)知 P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z 是已知量 Ω, ω, i 的函数，可直接求出，然后代入(16)式計算(x', y', z')。

在(16)中，因 $r\cos f=\xi$, $r\sin f=\eta$, (ξ, η) 为行星在軌道平面上的一种直角坐标；而 ξ 軸指向近日点，η 軸指向 $f=90°$ 的点，由此可看出：(P_x, P_y, P_z) 即为 ξ 軸对于坐标軸 X', Y', Z' 的方向余弦；(Q_x, Q_y, Q_z) 即为 η 軸对 X', Y', Z' 軸的方向余弦。因此有

$$P_x^2+P_y^2+P_z^2=1, \tag{18}$$

$$Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2=1, \tag{19}$$

$$P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z=0. \tag{20}$$

(18)，(19)，(20)式可作为計算(P_x, P_y, P_z)，(Q_x, Q_y, Q_z)的驗算公式。

算出了行星的日心赤道直角坐标(x', y', z')后，再利用坐标变换，把坐标原点移到地球中心。設行星的地心赤道直角坐标为(x'', y'', z'')，太阳的地心赤道直角坐标为$(x'_\odot, y'_\odot, z'_\odot)$，則有

$$\left.\begin{aligned} x''&=x'+x'_\odot,\\ y''&=y'+y'_\odot,\\ z''&=z'+z'_\odot. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$(x'_\odot, y'_\odot, z'_\odot)$的值可从天文年历查出。

根据(x'', y'', z'')，很容易由下面公式算出(ρ, α, δ)

$$\left.\begin{aligned} \rho\cos\alpha\cos\delta&=x'',\\ \rho\sin\alpha\cos\delta&=y'',\\ \rho\sin\delta&=z'', \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

即

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha=\frac{y''}{x''},\quad \sin\delta=\frac{z''}{\rho},\\ &\rho=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

α 的象限由 x'', y'' 的符号决定，方法与前面相同。δ 的符号与 z'' 相同。

上面提出的两种方法，各有优缺点。如果需要求出黄經黄緯 (λ, β)，则最好用前一种方法；如果不求 (λ, β)，用后一种更方便。最后得到的 (α, δ) 还不是视位置，还需要作光行差、岁差、章动的修正。这些修正方法，在球面天文学中已讲过了。

§8 高斯常数

在計算星历表过程中，如果利用日心赤道直角坐标 (x', y', z') 进行計算，需要用 (2-8-17) 式。这样的計算还很复杂，而且不便于用对数，现在引入高斯常数使得式子簡化。

一、定义

$$\left.\begin{aligned}
&\sin a \sin A = \cos \Omega,\\
&\sin a \cos A = -\sin \Omega \cos i,\\
&\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon,\\
&\sin b \cos B = -\sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \cos \Omega,\\
&\sin c \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon,\\
&\sin c \cos C = \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon \cos \Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 a, b, c, A, B, C 就叫做高斯常数。这样在計算它們时还有加减法，不便用对数。可再令

$$\left.\begin{aligned}
&m^* \sin M^* = \sin i,\\
&m^* \cos M^* = \cos i \cos \Omega,
\end{aligned}\right.$$

则

$$\left.\begin{aligned}
&\sin b \cos B = m^* \cos (M^* + \varepsilon),\\
&\sin c \cos C = m^* \sin (M^* + \varepsilon).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这样就完全是乘法，用对数計算就很方便了。在其中先令 $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ 都 $\geqslant 0$（即 a, b, c 在第一、二象限），才能唯一确定 A, B, C 的象限。

以(1)式代入(2-8-17)式得

$$\left.\begin{aligned}P_x&=\sin a\sin(A+\omega),\\Q_x&=\sin a\cos(A+\omega),\\P_y&=\sin b\sin(B+\omega),\\Q_y&=\sin b\cos(B+\omega),\\P_z&=\sin c\sin(C+\omega),\\Q_z&=\sin c\cos(C+\omega).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

把(3)代入(2-8-16)式即得

$$\left.\begin{aligned}x'&=r\sin a\sin(A+\omega+f),\\y'&=r\sin b\sin(B+\omega+f),\\z'&=r\sin c\sin(C+\omega+f).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

因此，只要高斯常数已算出，则求(x', y', z')就很方便了。

計算过程中，为避免錯誤，要找一些驗算公式。由(1)，(2)两式容易看出

$$\left.\begin{aligned}&\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=2,\\&\operatorname{ctg} A=-\cos i\operatorname{tg}\Omega,\\&\sin^2 b\sin^2 B+\sin^2 c\sin^2 C=\sin^2\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

这三个式子可作为驗算公式。

二、高斯常数的几何意义

設图13表示以太阳为中心的天球，大圆$X'\Omega'Y'$表示赤道，X'为春分点；大圆$X'\Omega$为黄道；大圆$\Omega'\Omega$为行星軌道。Z'表示赤道北极；Π'表示黄道北极；P表示行星軌道北极。则有$X'\Omega=\Omega$，$\angle\Omega'X'\Omega=\varepsilon$；$\angle X'\Omega\Omega'=i$，則由球面三角学公式知

$$\sin PX'\cos\alpha=\cos X'\Omega\sin P\Omega\\-\sin X'\Omega\cos P\Omega\cos X'\Omega P=\cos\Omega,$$

$$\sin PX'\sin\alpha=\sin X'\Omega\sin X'\Omega P=\sin\Omega\cos i.$$

因此，如果令$PX'=a$，$\alpha=A-90^\circ$，則得

$$\sin a \sin A = \cos \Omega,$$

$$\sin a \cos A = -\sin \Omega \cos i.$$

这正好同(1)式中的前两式符合，故 a 是行星軌道北极到春分点的角距离。而由图可知 $\angle \Omega P\Pi' = 90°$，故 A 角即为 $\angle X'P\Pi'$. 这就是 a, A 的几何意义。

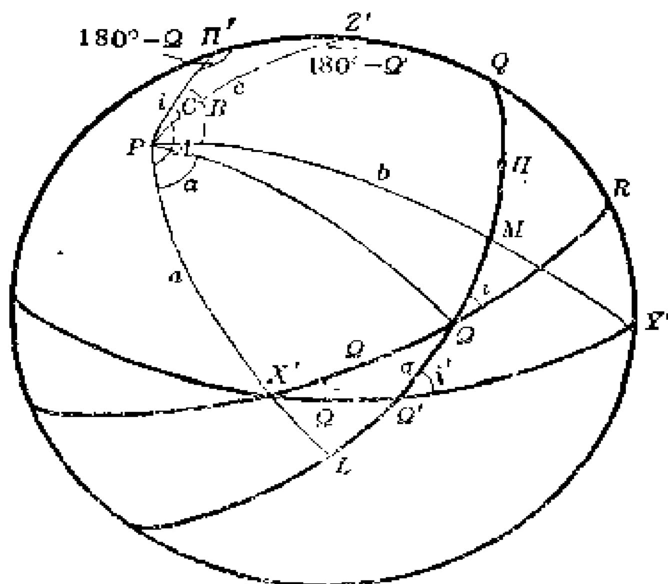


图　13

在三角形 $P\Pi'Y'$ 中，

$\Pi'Y' = 90° + \varepsilon$, $P\Pi' = i$, $\angle P\Pi'Y' = 180° - \Omega$, 故得

$$\sin PY' \sin \Pi'PY' = \sin P\Pi'Y' \sin \Pi'Y' = \sin \Omega \cos \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}\sin PY' \cos \Pi'PY' &= \cos \Pi'Y' \sin P\Pi' \\ &\quad - \sin \Pi'Y' \cos P\Pi' \cos P\Pi'Y' \\ &= -\sin \varepsilon \sin i + \cos \varepsilon \cos i \cos \Omega.\end{aligned}$$

因此，如果令 $PY' = b$, $\angle \Pi'PY' = B$, 即得

$$\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon,$$

$$\sin b \cos B = -\sin \varepsilon \sin i + \cos \varepsilon \cos i \cos \Omega.$$

这正好同(1)式的中間两式相同，故 b 即为行星軌道北极 P 到 Y'

軸端点的角距离，B 即大圆 $P\Pi'$ 和 PY' 的交角。

同样，在三角形 $P\Pi'Z'$ 中，

$$P\Pi'=i,\ \Pi'Z'=\varepsilon,\ \angle P\Pi'Z'=180^\circ-\Omega,\text{ 有}$$

$$\sin PZ'\sin\Pi'PZ'=\sin P\Pi'Z'\sin\Pi'Z'=\sin\Omega\sin\varepsilon,$$

$$\sin PZ'\cos\Pi'PZ'=\cos\Pi'Z'\sin P\Pi'-\sin\Pi'Z'\cos P\Pi'\cos P\Pi'Z'=\cos\varepsilon\sin i+\sin\varepsilon\cos i\cos\Omega.$$

如果令 $PZ'=c$，$\angle\Pi'PZ'=C$，則得

$$\sin c\sin C=\sin\Omega\sin\varepsilon,$$

$$\sin c\cos C=\cos\varepsilon\sin i+\sin\varepsilon\cos i\cos\Omega.$$

这正好同(1)的最后两式相同，故 c，C 的几何意义也很明确。

总的説来，a，b，c 即为 P 到 X',Y',Z' 的角距离，而 P 为行星軌道的北极。也就是説 a，b，c 为行星軌道的法綫方向（向北）对于 X',Y',Z' 坐标系的方向角。A，B，C 即为 PX'，PY'，PZ' 三个大圆同大圆 $P\Pi'$ 的交角。

三、象限的确定

既然 a，b，c 为行星軌道的法綫对赤道坐标系 X'，Y'，Z' 的方向角，則它的方向余弦应为 $\cos a$，$\cos b$，$\cos c$。在討論摄动时要用到它們。因为前面只求出 $\sin a$，$\sin b$，$\sin c$，由于还不能确定 a，b，c 的象限，故不能直接得到 $\cos a$，$\cos b$，$\cos c$，现在来推导它們。

設 Ω' 为行星軌道对赤道的升交点，令 $X'\Omega'=\Omega'$，再令 i' 为行星軌道对赤道的傾角(图 13)。由球面的性质知

$$i'=c,\quad \angle PZ'Y'=180^\circ-\Omega'. \tag{6}$$

在三角形 $PY'Z'$ 中，$Y'Z'=90^\circ$，$\angle Y'PZ'=B-C$，故得

$$\sin(B-C)\sin b=\sin PZ'Y'=\sin\Omega'. \tag{7}$$

但又在三角形 $X'\Omega'L$ 中，$X'L=90^\circ-a$，$X'\Omega'=\Omega'$，$\angle X'\Omega'L=c$，

$\angle X'L\Omega'=90^\circ$. 故得

$$\sin\Omega'\sin c=\sin(90^\circ-a)=\cos a. \tag{8}$$

即
$$\sin\Omega'=\frac{\cos a}{\sin c}.$$

代入(7)式得

$$\cos a=\sin b\sin c\sin(B-C). \tag{9}$$

再由三角形$PZ'X'$, 因$\angle X'PZ'=A-C$, $X'Z'=90^\circ$, $\angle PZ'X'=90^\circ-\Omega'$, 故得

$$\sin(A-C)\sin a=\sin(90^\circ-\Omega'). \tag{10}$$

但在三角形 $\Omega'Y'M$ 中, $\Omega'Y'=90^\circ-\Omega'$, $\angle Y'\Omega'M=i'=c$, $MY'=b-90^\circ$, $\angle\Omega'MY'=90^\circ$, 故得

$$\sin(90^\circ-\Omega')\sin c=\sin(b-90^\circ)=-\cos b.$$

同(10)式消去 $\sin(90^\circ-\Omega')$ 得

$$\begin{aligned}\cos b&=-\sin(A-C)\sin a\sin c\\&=\sin c\sin a\sin(C-A).\end{aligned} \tag{11}$$

最后,在三角形 $PX'Y'$ 中, $X'Y'=90^\circ$, $\angle X'PY'=A-B$, 有

$$\sin b\sin(A-B)=\sin PX'Y', \tag{12}$$

又在三角形 $X'L\Omega'$ 中, $\angle X'\Omega'L=i'=c$, $\angle X'L\Omega'=90^\circ$, $X'L=90^\circ-a$, 有

$$\cos c=\cos(90^\circ-a)\sin LX'\Omega'=\sin a\sin PX'Y',$$

以(12)代入得

$$\cos c=\sin a\sin b\sin(A-B). \tag{13}$$

(9), (11), (13)即为所需要的式子。

四、常数 P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z 的另一表达式

如果已知行星对赤道的升交点赤經 Ω', 和傾角 i', 并在图 13 中令 $\Omega'\Omega=\sigma$, 并令 $\omega'=\omega+\sigma$. 則 P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z, 可用 i', Ω', ω' 来表示,且形式更为簡单。

在图 13 中，設 Π 为行星軌道近日点方向，則 $P_x=\cos\Pi X'$，$P_y=\cos\Pi Y'$，$P_z=\cos\Pi Z'$。$\Pi\Omega=\omega$，$\Pi\Omega'=\omega'$。

从三角形 $\Pi X'\Omega'$，$\Pi Y'\Omega'$，$\Pi Z'\Omega'$ 容易看出

$$\left.\begin{aligned} P_x&=\cos\Pi X'=\cos\Omega'\cos\omega'-\sin\Omega'\sin\omega'\cos i',\\ P_y&=\cos\Pi Y'=\cos\omega'\sin\Omega'+\sin\omega'\cos\Omega'\cos i',\\ P_z&=\cos\Pi Z'=\sin\omega'\sin i'. \end{aligned}\right\}\tag{14}$$

求 Q_x，Q_y，Q_z 时只要把上面的 ω' 換成 $\omega'+90^\circ$ 就行了。即

$$\left.\begin{aligned} Q_x&=-\cos\Omega'\sin\omega'-\sin\Omega'\cos\omega'\cos i',\\ Q_y&=-\sin\Omega'\sin\omega'+\cos\Omega'\cos\omega'\cos i',\\ Q_z&=\cos\omega'\sin i'. \end{aligned}\right\}\tag{15}$$

事实上，如果不知道 ω'，i'，Ω'，也很容易从 Ω，i，ε 来求出。在图 13 的三角形 $X'\Omega'\Omega$ 中，$X'\Omega'=\Omega'$，$X'\Omega=\Omega$，$\Omega'\Omega=\sigma$，三个角各为 i，$180^\circ-i'$，ε，故可根据球面三角学中的达朗贝尔公式得

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)&=\sin\frac{1}{2}\Omega\cos\frac{1}{2}(i-\varepsilon),\\ \cos\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(\Omega'+\sigma)&=\cos\frac{1}{2}\Omega\cos\frac{1}{2}(i+\varepsilon),\\ \sin\frac{1}{2}i'\sin\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)&=\sin\frac{1}{2}\Omega\sin\frac{1}{2}(i-\varepsilon),\\ \sin\frac{1}{2}i'\cos\frac{1}{2}(\Omega'-\sigma)&=\cos\frac{1}{2}\Omega\sin\frac{1}{2}(i+\varepsilon). \end{aligned}\right\}\tag{16}$$

由此可求出 i'，Ω'，σ，再根据 $\omega'=\omega+\sigma$ 求出 ω'。

§10 計算星历表的步驟

到現在为止，如果已知行星軌道根数就可以計算它的星历表。現在将它們总結如下。

如果已知軌道根数为

$\Omega,\ i,\ \omega,\ a,\ e,\ M_0[=n(t_0-\tau)]$；（对橢圓軌道）

$\Omega,\ i,\ \omega,\ q,\ T$；（对拋物綫軌道）

$\Omega,\ i,\ \omega,\ a_1,\ e,\ T$。（对双曲綫軌道）

其中 Ω, i, ω 三个根数，对于三种軌道都有同样的意义，它們都同春分点和黄道的位置有关，因此給出它們的数值时，要同时指出所对应的春分点和黄道的历元。例如 1950.0，1957.0 等。采用的黄赤交角 ε，也应該对应于同一历元。

1. 計算 P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z 可利用高斯常数。

$$\left.\begin{aligned}
&\sin a\sin A=\cos\Omega,\\
&\sin a\cos A=-\sin\Omega\cos i,\\
&\sin b\sin B=\sin\Omega\cos\varepsilon,\\
&\sin b\cos B=-\sin i\sin\varepsilon+\cos i\cos\varepsilon\cos\Omega,\\
&\sin c\sin C=\sin\Omega\sin\varepsilon,\\
&\sin c\cos C=\sin i\cos\varepsilon+\cos i\sin\varepsilon\cos\Omega.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

要用对数計算时，則用

$$\left.\begin{aligned}
&m^*\sin M^*=\sin i,\\
&m^*\cos M^*=\cos i\cos\Omega,\\
&\sin b\cos B=m^*\cos(M^*+\varepsilon),\\
&\sin c\cos C=m^*\sin(M^*+\varepsilon).
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I}_1)$$

驗算公式为

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=2,\\
&\cot A=-\cos i\tan\Omega,\\
&\sin^2 b\sin^2 B+\sin^2 c\sin^2 C=\sin^2\Omega.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I}_2)$$

然后得

$$\left.\begin{aligned}
&P_x=\sin a\sin(A+\omega),\\
&Q_x=\sin a\cos(A+\omega),\\
&P_y=\sin b\sin(B+\omega),
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{aligned} Q_y &= \sin b \cos(B+\omega), \\ P_z &= \sin c \sin(C+\omega), \\ Q_z &= \sin c \cos(C+\omega). \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

驗算公式为

$$\left.\begin{aligned} P_x^2+P_y^2+P_z^2=1, \\ Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2=1. \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

2. 計算日心赤道直角坐标 (x', y', z')，需要把三种軌道分开討論。

(1) 椭圓軌道：令 $e=\sin\varphi$，計算

$$\left.\begin{aligned} &A_x=aP_x, \quad A_y=aP_y, \quad A_z=aP_z; \\ &B_x=aQ_x\sin\varphi, \ B_y=aQ_y\cos\varphi, \ B_z=aQ_z\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{V$_1$}$$

由

$$\left.\begin{aligned} M &= n(t-\tau) = n(t-t_0)+M_0, \\ E-e\sin E &= M, \end{aligned}\right\} \tag{VI$_1$}$$

求出 E，再由下列公式求出 (x', y', z').

$$\left.\begin{aligned} x' &= A_x(\cos E-e)+B_x\sin E, \\ y' &= A_y(\cos E-e)+B_y\sin E, \\ z' &= A_z(\cos E-e)+B_z\sin E. \end{aligned}\right\} \tag{VII$_1$}$$

同时可据下式算出向徑 r，

$$r=a(1-e\cos E). \tag{VIII$_1$}$$

(2) 抛物綫軌道：令

$$\left.\begin{aligned} &a_x=qP_x, \quad a_y=qP_y, \quad a_z=qP_z; \\ &b_x=2qQ_x, \quad b_y=2qQ_y, \quad b_z=2qQ_z. \end{aligned}\right\} \tag{V$_2$}$$

根据

$$M=(t-T)q^{-\frac{3}{2}}, \tag{VI$_2$}$$

查表求出 f 或 $\operatorname{tg}\dfrac{f}{2}=\sigma$，則得

$$\left.\begin{aligned}x'&=a_x(1-\sigma^2)+b_x\sigma,\\y'&=a_y(1-\sigma^2)+b_y\sigma,\\z'&=a_z(1-\sigma^2)+b_z\sigma,\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{VII}_2)$$

以及

$$r=q\sec^2\frac{f}{2}=q(1+\sigma^2).\qquad(\mathrm{VIII}_2)$$

(3) 双曲綫軌道：令

$$\left.\begin{aligned}&A_x=a_1P_x, && A_y=a_1P_y,\\&A_z=a_1P_z; && B_x=a_1\sqrt{e^2-1}\,Q_x,\\&B_y=a_1\sqrt{e^2-1}\,Q_y, && B_z=a_1\sqrt{e^2-1}\,Q_z.\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{V}_3)$$

从

$$\left.\begin{aligned}&M=\nu(t-T)=\sqrt{\mu}a_1^{-\frac{3}{2}}(t-T),\\&e\sinh F-F=M,\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{VI}_3)$$

求出 F，再由下式求出 (x', y', z').

$$\left.\begin{aligned}x'&=A_x(e-\cosh F)+B_x\sinh F,\\y'&=A_y(e-\cosh F)+B_y\sinh F,\\z'&=A_z(e-\cosh F)+B_z\sinh F.\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{VII}_3)$$

并求出
$$r=a_1(e\cosh F-1).$$

求出的坐标(x', y', z') 与 $(\Omega, i, \omega, \varepsilon)$的春分点和黄道历元相同。如果要改变，可利用現成的表❶。

3. 計算 (α, δ) 和 ρ. 对任何时刻t，由天文年历可找出太阳的赤道直角坐标 (X, Y, Z). 对应的春分点和黄道的历元应与(x', y', z')相同，则

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha&=\frac{(y'+Y)}{(x'+X)},\\\operatorname{tg}\delta&=\frac{(z'+Z)\sin\alpha}{y'+Y},\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{IX})$$

❶ Дубяго 著：Определение Орбит，附表 X。

$$\rho=\frac{z'+Z}{\sin\delta}. \tag{X}$$

§ 11 計算椭圓和拋物綫軌道的星历表

1. 計算小行星紫金 1 号，在 1956 年 5 月 7 日世界时零时的星历表。它的軌道根数如下：

$t_0=1955$ 年 3 月 24 日世界时零时，$M_0=25^\circ\!.906$，

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi=16^\circ\!.401, & \Omega=85^\circ\!.072,\\ e=0.2823582, & \omega=10^\circ\!.332,\\ e^0=16^\circ\!.1779, & i=14^\circ\!.514;\end{array}\right\}\text{1950.0 的黄道和春分点。}$$

$$n=0^\circ\!.2297833,\quad a=2.63992.$$

查出 1950.0 的 $\varepsilon=23^\circ26'44''\!.8$，得

$$\sin\varepsilon=0.397885,\quad \cos\varepsilon=0.917435,$$

$$\sin\Omega=0.996303,\quad \cos\Omega=0.085904,$$

$$\sin i=0.250617,\quad \cos i=0.968086.$$

$$\sin a\sin A=\cos\Omega=0.085904,$$

$$\sin a\cos A=-\cos i\sin\Omega=-0.964507,$$

$$\operatorname{tg}A=-0.089065,$$

$$A=180^\circ-5^\circ\!.090=174^\circ\!.910;$$

$$\sin a=0.968325,$$

$$\sin c\sin C=\sin\Omega\sin\varepsilon=0.396414,$$

$$\cos i\cos\Omega\sin\varepsilon=0.033091,$$

$$\sin i\cos\varepsilon=0.229925,$$

$$\sin c\cos C=0.263010,$$

$$\operatorname{tg}C=1.507186,$$

$$C=56^\circ\!.436;$$

$$\sin c=0.475734.$$

$$\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon = 0.914043,$$

$$\cos i \cos \varepsilon \cos \Omega = 0.076296,$$

$$\sin i \sin \varepsilon = 0.099717,$$

$$\sin b \cos B = -0.023421,$$

$$\operatorname{tg} B = -39.027,$$

$$B = 180° - 88.^\circ 532 = 91.^\circ 468;$$

$$\sin b = 0.914343,$$

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1.999999.$$

$$A + \omega = 185.^\circ 242, \quad B + \omega = 101.^\circ 800, \quad C + \omega = 66.^\circ 768;$$

$$P_x = \sin a \sin (A + \omega) = -0.088468,$$

$$Q_x = \sin a \cos (A + \omega) = -0.964275,$$

$$P_y = \sin b \sin (B + \omega) = 0.859502,$$

$$Q_y = \sin b \cos (B + \omega) = -0.186979,$$

$$P_z = \sin c \sin (C + \omega) = 0.437159,$$

$$Q_z = \sin c \cos (C + \omega) = 0.187656;$$

$$a = 2.63992, \quad a \cos \varphi = 2.53250,$$

$$A_x = aP_x = -0.23356, \quad B_x = aQ_x \cos \varphi = -2.44203,$$

$$A_y = aP_y = 2.36278, \quad B_y = aQ_y \cos \varphi = -0.47352,$$

$$A_z = aP_z = 1.15406, \quad B_z = aQ_z \cos \varphi = 0.47524.$$

$t = 1956$ 年 5 月 7.0， $t_0 = 1955$ 年 3 月 24.0，

$t - t_0 = 410$ 日，

$$n(t - t_0) = 94.^\circ 21,$$

$$M_0 = 25.^\circ 91;$$

$$M = 120.^\circ 12.$$

解克普勒方程得 $E = 132.^\circ 12$.

$$\cos E = -0.6709, \quad \sin E = 0.7417, \quad \cos E - e = -0.9533;$$

$$A_x (\cos E - e) = +0.2227, \quad A_y (\cos E - e) = -2.2524,$$

$$A_z(\cos E-e)=-1.1001;$$

$$B_x\sin E=-1.8112,\quad B_y\sin E=-0.3512,$$

$$B_z\sin E=+0.3524;\quad X=+0.8970,$$

$$Y=+0.6696,\quad Z=+0.2904;$$

$$X+x'=-0.8915,\quad Y+y'=-1.9340,$$

$$Z+z'=-0.4573;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'+Y}{x'+X}=+2.1694,$$

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{(z'+Z)\sin\alpha}{y'+Y}=-0.2147,$$

$$\alpha=180^\circ+65^\circ\!.25=16^h21^m\!.0,\quad \delta=-12^\circ12'.$$

所得的 α, δ 都是对应于 1950.0 的春分点和赤道。

2. 計算彗星 1946.B 在 1946 年 6 月 15.0（世界时）的星历表。軌道根数为

$$T=1946\text{ 年 }5\text{ 月 }11^d\!.41722\text{（世界时）},$$

$$\left.\begin{aligned}\omega&=22^\circ15'36''\!.8,\\ \Omega&=301^\circ16'28''\!.6,\\ i&=167^\circ33'32''\!.8,\end{aligned}\right\}1946.0\text{ 的黄道和春分点。}$$

$$q=1.018122.$$

用对数計算。有括号的数字表示对数，負数的对数在右脚下添"n"表示。

$$\varepsilon=23^\circ26'46''\!.7,$$

$$m^*\sin M^*=\sin i=[\bar{1}.258209],$$

$$\cos i=[\bar{1}.992749_n],$$

$$\cos\Omega=[\bar{1}.715285],$$

$$m^*\cos M^*=\cos i\cos\Omega=[\bar{1}.708034_n],$$

$$\operatorname{tg}M^*=[\bar{1}.550175_n],$$

$$M^*=180^\circ-19^\circ32'33''\!.5=160^\circ27'26''\!.5,$$

$$m^* = [\bar{1}.733802],$$

$$M^* + \varepsilon = 183°54'13''.2,$$

$$\sin a \sin A = \cos \Omega = [\bar{1}.715285_n],$$

$$\sin \Omega = [\bar{1}.931808_n],$$

$$\cos i = [\bar{1}.992749_n],$$

$$\sin a \cos A = [\bar{1}.924557_n],$$

$$\mathrm{tg}\, A = [\bar{1}.790728],$$

$$A = 148°17'57''.4,$$

$$\sin a = [\bar{1}.994727];$$

$$\sin \Omega = [\bar{1}.931808_n],$$

$$\cos \varepsilon = [\bar{1}.962574],$$

$$\sin b \sin B = [\bar{1}.894382_n],$$

$$m^* = [\bar{1}.733802],$$

$$\cos(M^* + \varepsilon) = [\bar{1}.998991_n],$$

$$\sin b \cos B = [\bar{1}.732793_n],$$

$$\mathrm{tg}\, B = [0.161589],$$

$$B = 235°25'16''.9,$$

$$\sin b = [\bar{1}.978779];$$

$$\sin \Omega = [\bar{1}.931808_n],$$

$$\sin i = [\bar{1}.599762],$$

$$\sin c \sin C = [\bar{1}.531570_n],$$

$$m^* = [\bar{1}.733802],$$

$$\sin(M^* + \varepsilon) = [\bar{2}.833014_n],$$

$$\sin c \cos C = [\bar{2}.566816_n],$$

$$\mathrm{tg}\, C = [0.964754_n],$$

$$C = 263°48'36''.8,$$

$$\sin c = [\bar{1}.534110];$$

$$\sin^2 a = 0.976010,$$
$$\sin^2 b = 0.906980,$$
$$\sin^2 c = 0.117009,$$
$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1.999999.$$
$$A+\omega = 170°33'34''.2,$$
$$B+\omega = 257°40'53''.7,$$
$$C+\omega = 286°4'13''.6;$$
$$t-T = 34^{d}.58278 = [1.538860],$$
$$q = 1.018122 = [0.007799], \quad q^{\frac{3}{2}} = [0.011700],$$
$$M = [1.527165],$$

查表得

$$f = 42°35'9''.0,$$
$$\sec^2 \frac{f}{2} = 0.061414;$$

$$A+\omega+f = 213°8'43''.2,$$
$$B+\omega+f = 300°16'2''.7,$$
$$C+\omega+f = 328°39'22''.6;$$
$$\sin(A+\omega+f) = [\bar{1}.737800_n],$$
$$\sin(B+\omega+f) = [\bar{1}.936554_n],$$
$$\sin(C+\omega+f) = [\bar{1}.716146_n];$$
$$q = [0.007799],$$
$$\sin a = [\bar{1}.994727], \quad \sin b = [\bar{1}.978799],$$
$$\sin c = [\bar{1}.534110],$$
$$\sec^2 \frac{1}{2} f = [0.061414],$$
$$x' = [\bar{1}.801740_n] = -0.633490,$$
$$y' = [\bar{1}.984566_n] = -0.964642,$$
$$z' = [\bar{1}.319469_n] = -0.208674;$$

$$X=+0.118613,\quad Y=+0.925532,\quad Z=+0.401400;$$

$$x'+X=-0.514877=[\bar{1}.711704_n],$$

$$y'+Y=-0.039110=[\bar{2}.592288_n],$$

$$z'+Z=0.192726=[\bar{1}.284940];$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=[\bar{2}.880584],$$

$$\sin\alpha=[\bar{2}.879334_n],$$

$$\alpha=180^\circ+4^\circ20'37''.8=12^h17^m22^s.52.$$

$$\frac{y+Y}{\sin\alpha}=[\bar{1}.712954],$$

$$\mathrm{tg}\,\delta=[\bar{1}.571986],$$

$$\sin\delta=[\bar{1}.543666],$$

$$\delta=+20^\circ28'3''.0.$$

$$\rho=[1.741274].$$

§12 拉格朗日級数

在实际問題中計算行星的坐标时，用上面两节的方法已很够了，其中最主要一个环节就是解克普勒方程，根据已知的 M 来求 E。但在理論問題的討論中，需要把一个 E 的函数表示成 M 的显函数。可是根据克普勒方程做不到这点，只有用級数展开的方法，把 E 的函数展开成 M 的三角級数。到現在为止，主要有两个方法来进行展开，本节只讲其中之一，还有一个将在 §16 讲述。

設 y 为 x 的函数，其关系为

$$y=x+\alpha\phi(y).\tag{1}$$

其中 α 为一参变量，但 $0<\alpha<1$；ϕ 是 y 的某一已知函数。我們現在要把 y 的任何函数 $F(y)$ 表示成为 α 的冪級数，系数中只含 x。

y，$F(y)$ 都是 α，x 的函数。如果我們把其中的 x 看为常量，先把 $F(y)$ 展开成 α 的冪級数。根据馬克洛林級数得

$$F(y)=(F)_0+\frac{\alpha}{1!}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_0+\frac{\alpha^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_0+\cdots$$

$$+\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_0+\cdots, \tag{2}$$

其中偏导数外面的脚数“0”表示求出偏导数后，令其中的 $\alpha=0$。

为討論方便起見，用 A 表示偏导数运算的运算子 $\frac{\partial}{\partial\alpha}$，則上式成为

$$F(y)=(F)_0+\frac{\alpha}{1!}(AF)_0$$

$$+\frac{\alpha^2}{2!}(A^2F)_0+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}(A^nF)_0+\cdots. \tag{3}$$

但由(1)式知

$$Ay=\phi(y)+\alpha\frac{d\phi}{dy}Ay, \tag{4}$$

其中把 x 当作常量。如再令 D 表示运算子 $\frac{\partial}{\partial x}$，則

$$Dy=1+\alpha\frac{d\phi}{dy}Dy. \tag{5}$$

以(5)式乘上 $\phi(y)$ 再由(4)减去得

$$(Ay-\phi Dy)\left(1-\alpha\frac{d\phi}{dy}\right)=0.$$

两个因子中至少有一个等于零。但后面的那个不可能为零，因如果

$$1-\alpha\frac{d\phi}{dy}=0,$$

則 $\alpha\phi=y+$常数，說明 ϕ 是 y 的綫性函数，失去了一般性。因此只有

$$Ay-\phi Dy=0, \quad 即 \quad Ay=\phi Dy. \tag{6}$$

这就是两个运算子之間的关系。現在就来利用这个关系討論(3)

式。由

$$AF(y)=\frac{\partial F(y)}{\partial\alpha}=\frac{dF}{dy}Ay=\phi\frac{dF}{dy}Dy,$$

但

$$DF(y)=\frac{\partial F(y)}{\partial x}=\frac{dF}{dy}Dy.$$

比較这两式可得

$$AF=\phi DF. \tag{7}$$

在(3)式中要用到 A^nF，下面我們采用数学归納法来証明一个关系

$$A^nF=D^{n-1}(\phi^n DF). \tag{8}$$

在 $n=1$ 时，由(7)式知(8)是成立的；現在要来証明如果 n 对于任意正整数 m 成立，則对于 $n=m+1$ 也成立。

在 $n=m$ 时，(8)式为

$$A^mF=D^{m-1}(\phi^m DF),$$

則

$$A^{m+1}F=AD^{m-1}(\phi^m DF). \tag{9}$$

因 α 和 x 是彼此无关的，所以 A，D 的运算可以交换，(9) 式成为

$$A^{m+1}F=D^{m-1}[A(\phi^m DF)].$$

但
$$\begin{aligned}A(\phi^m DF)&=DF\cdot A(\phi^m)+\phi^m A(DF)\\&=DF\cdot\phi D(\phi^m)+\phi^m D(AF)\quad(\text{根据(6)式})\\&=\phi\cdot DF\cdot D(\phi^m)+\phi^m D(\phi DF)\quad(\text{根据(6)式})\\&=D(\phi^{m+1}DF),\end{aligned}$$

故得

$$A^{m+1}F=D^m(\phi^{m+1}DF).$$

这就是說，(8)式在 $n=m+1$ 时成立。于是由数学归納法知，对于 n 等于任何正整数都成立。

在 $\alpha=0$ 时，由(1)式知 $y=x$，而(8)式右端只有运算子 D，也就是不对 α 取偏导数。若用 F_x 表示在 $F(y)$ 中，把 y 换成 x，則有

$$(DF)_0=DF_x,\quad (D\phi)_0=D\phi_x. \tag{10}$$

故由(8)式得

$$(\Delta^n F)_0 = [D^{n-1}(\phi^n DF)]_0 = D^{n-1}(\phi_x^n DF_x). \tag{11}$$

以(11)代入(3)得

$$F(y) = F_x + \frac{\alpha}{1!}[\phi_x DF_x] + \frac{\alpha^2}{2!}D(\phi_x^2 DF_x) + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha^n}{n!}D^{n-1}(\phi_x^n DF_x) + \cdots. \tag{12}$$

換为普通記号得

$$F(y) = F_x + \frac{\alpha}{1!}\left(\phi_x \frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_x^2 \frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\phi_x^n \frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \cdots. \tag{13}$$

这就是拉格朗日級数。$F(y)$表示成为 α 的冪級数，系数中只包含 x。这里只推出这一公式，詳細討論可參看有关书籍[1]。

§13 拉格朗日級数的收斂范圍

上节所讲的拉格朗日級数，对任意的 α 值不一定收斂。用复变函数理論可以証明。由关系

$$y = x + \alpha\phi(y) \tag{1}$$

所决定的复变量 y，如果 $\phi(y)$ 为解析函数，則級数

$$F(y) = F_x + \frac{\alpha}{1!}\left[\phi_x \frac{\partial F_x}{\partial x}\right] + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\phi_x^n \frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \cdots$$

的收斂条件为

$$\left|\frac{\alpha\phi(y)}{y-x}\right| < 1. \tag{2}$$

要証明这点，先証明三个預备定理。

預备定理 1 若 $\phi(z)$ 是某一个单連通域內的半純函数，在此域的边界 C 上为解析。設 $\phi(z)$ 在域內有 k 个零点，它們的級各

---

[1] Brown 著：Planetary Theory, p. 37.

为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$；并有 l 个极点，它們的級各为 $s_1, s_2, \cdots, s_l$。再介 $\Delta\Phi$ 表示 $\phi(z)$ 的幅角 $\arg\{\phi(z)\}$ 在 z 繞 C 正向轉一周时的增量，則有

$$\sum_{p=1}^{k} r_p - \sum_{q=1}^{l} s_q = \frac{\Delta\Phi}{2\pi}. \tag{3}$$

証 由留数理論❶可知，假設 $f(z)$ 为 C 及其内部的解析函数，則有

$$\sum_{p=1}^{k} r_p f(a_p) - \sum_{q=1}^{l} s_q f(b_q) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz, \tag{4}$$

其中 a_p, b_q 分别为 $\phi(z)$ 在 C 内的零点和极点。

若介 $f(z)\equiv 1$，則(4)式为

$$\sum_{p=1}^{k} r_p - \sum_{q=1}^{l} s_q = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\ \Delta \ln \phi(z), \tag{5}$$

其中 $\Delta \ln \phi(z)$ 为 $\ln \phi(z)$ 在 z 繞 C 轉一周时的增量。若介

$$\phi(z) = \mathrm{R}e^{i\Phi},\ \text{則}\ \ln\phi(z) = \ln R + i\Phi;$$

$$\Delta \ln \phi(z) = \Delta \ln R + i\Delta\Phi = i\Delta\Phi.$$

代入(5)式得

$$\sum_{p=1}^{k} r_p - \sum_{q=1}^{l} s_q = \frac{\Delta\Phi}{2\pi}.$$

預备定理 2 設 $f(z)$ 和 $\phi(z)$ 是以 C 上及 C 内的解析函数，并且 $f(z)$ 在 C 上不等于零；以及在 C 上有 $\left|\frac{\phi(z)}{f(z)}\right| < 1$. 則 $f(z)$ 和 $f(z)+\phi(z)$ 在 C 内有同样数目的零点。

証 介 $w = 1 + \frac{\phi(z)}{f(z)}$，則由上面条件可知，当 z 沿 C 繞一圈时，w 在 $+1$ 这一点附近变化，不会繞原点轉圈。因此 w 的幅角沒有增加，也就是函数 $\phi(z)+f(z)$ 和 $f(z)$ 的幅角增加相等。由于它們都是解析函数，故根据預备定理 1 知它們在 C 内的零点数目相等。

---

❶ 参看 普里瓦諾夫著：复变函数引論，下册，p. 271.

預备定理 3 假定 $f(z)$ 是在域 $|z|<r$ 内的解析函数，并在 $z=0$ 时不为 0，則存在一正实数 ρ，使得 $|w|\leqslant\rho$ 时，函数 $\psi(z, w) = z-wf(z)$（視为 z 的函数）在圓 $|z|=r'<r$ 内只有一个零点，并且这个零点为 $|w|\leqslant\rho$ 的解析函数。

証 由于 $f(z)$ 在 $|z|<r$ 为解析，因此当 $|z|=r'<r$ 时可以找到一正实数 ρ，使得 $|w|\leqslant\rho$ 时，

$$|\psi(z, w)-\psi(z, 0)|=|wf(z)|<r',$$

因此有

$$\left|\frac{\psi(z, w)-\psi(z, 0)}{\psi(z, 0)}\right|<1 \quad (\because \quad |z|=r'). \tag{6}$$

于是由預备定理 2，$\psi(z, w)$ 应与 $\psi(z, 0)=z$ 在 $|z|=r'$ 内的零点个数相同，而 z 只有一个零点，因此 $\psi(z, w)$ 也只有一个，設为 ξ。根据留数理論知

$$\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{\dfrac{\partial}{\partial z}\psi(z, w)}{\psi(z, w)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{1-wf'(z)}{z-wf(z)}dz, \tag{7}$$

其中 C 为圓 $|z|=r'$。由于积分号内的函数为 w 的解析函数，故 ξ 亦为 w 的解析函数，具有同样条件 $|w|\leqslant\rho$。

如果 $F(z)$ 为 $|z|<r$ 内的解析函数，則同样有

$$F(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\ \frac{1-wf'(z)}{z-wf(z)}dz. \tag{8}$$

根据 (8)式，我們就可以得到拉格朗日級数了。由于 ξ 是 $\psi(z, w)=z-wf(z)=0$ 的解，下面我們仍記为 z。則由 (8)式知

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\ \frac{1-wf'(z)}{z-wf(z)}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,[1-wf'(z)]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[wf(z)]^n}{z^{n+1}}dz.\end{aligned}$$

但由 (6) 式知 $\left|\dfrac{wf(z)}{z}\right|<1$，因此上式的級数为收斂。把上式按 w

的乘冪整理得

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(z)}{z}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n}\int_C F(z)\left[-\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^n\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(z)}{z}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n}\int_C\frac{d}{dz}\left[F(z)\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^n\right]dz+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n}\int_C F'(z)\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}^n dz,$$

其中第二項的积分显然为0，其余的根据哥西定理和导数公式卽得

$$F(z)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[F'(z)\cdot(f(z))^n\right]\right\}_{z=0}. \quad (9)$$

(9)式卽为拉格朗日級数，只是形式略有不同。

如果把坐标原点平移到另外一点，坐标为$-\xi$，則有

$$\psi(z,w)=z-\xi-wf(z-\xi)=z-\xi-w\phi(z). \quad (10)$$

前面的推导也完全相同，(9)式成为

$$F(z)=F(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(F'(z)\{\phi(z)\}^n)\right]_{z=\xi}$$

$$=F(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}[F'(\xi)\{\phi(\xi)\}^n]. \quad (11)$$

这就是熟知的拉格朗日級数形式，z为(10)式的解，卽

$$z=\xi+w\phi(z). \quad (12)$$

級数收斂条件成为

$$\left|\frac{w\phi(z)}{z-\xi}\right|<1. \quad (13)$$

于是(2)式就証明了。

§ 14 椭圓軌道偏心率的拉普拉斯极限

克普勒方程为

$$E=M+e\sin E, \tag{1}$$

根据(2-13-1)式，比較得 $y=E$, $x=M$, $\alpha=e$, $\phi(y)=\sin E$. 因此展开式为

$$F(E)=F(M)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}\left(\sin^n M\frac{dF(M)}{dM}\right), \tag{2}$$

其中 M, e 为正实数，設 E 为复数(包括实数)。(2-13-2)式所述的收斂条件为

$$e\left|\frac{\sin E}{E-M}\right|<1. \tag{3}$$

如果令 $E=x+\sqrt{-1}\,y$, 則在复平面中（图 14），M 应在实軸上。設 E 到 M 的距离为 ρ, ME 同 X 軸方向的交角为 φ，則由复数的性质知

$$E=M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi}. \tag{4}$$

其中 ε 为自然对数的底(普通用 e 表示，但这里的 e 表示偏心率)，故(3)式成为

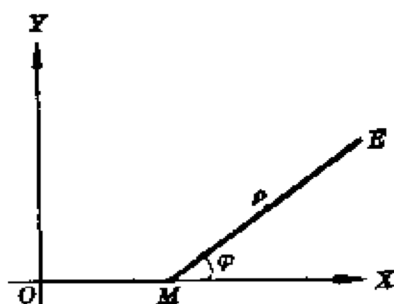


图 14

$$e\left|\frac{\sin(M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi})}{\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi}}\right|=\frac{e}{\rho}\left|\sin(M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi})\right|<1. \tag{5}$$

設 $f(\rho)$ 为 $|\sin(M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi})|$ 的极大值，則(5)式可写为

$$e<\frac{\rho}{f(\rho)}. \tag{6}$$

又設在 $\rho=\rho_1$ 时，(6)式右端为极大，則上式成为

$$e<\frac{\rho_1}{f(\rho_1)}=e_1. \tag{7}$$

只要求出 ρ_1，就可算出 e_1。这里的 ρ_1 应是滿足(2)式收斂条件 e 的极大値。下面就来求 ρ_1。

由于 $\sin(M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi})$ 的共軛复数为 $\sin(M+\rho\varepsilon^{-\sqrt{-1}\varphi})$，故得

$$\begin{aligned}|\sin(M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi})|^2&=\sin(M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi})\cdot\sin(M+\rho\varepsilon^{-\sqrt{-1}\varphi})\\&=\sin(M+\rho\cos\varphi+\rho\sqrt{-1}\sin\varphi)\sin(M\\&\quad+\rho\cos\varphi-\rho\sqrt{-1}\sin\varphi)\\&=\frac{1}{2}[\cos 2(\rho\sqrt{-1}\sin\varphi)-\cos 2(M+\rho\cos\varphi)]\\&=\cos^2(\rho\sqrt{-1}\sin\varphi)-\cos^2(M+\rho\cos\varphi)\\&=\cosh^2(\rho\sin\varphi)-\cos^2(M+\rho\cos\varphi).\end{aligned}\tag{8}$$

我們需要求出上式的极大値。正規办法是把它对 φ 和 M 取偏导数后，再令它們等于零来解。这里用一种簡单方法。可以看出，(8)式右端为两項之差，如果前面的一項取最大値时，后面一項取最小値；則它們的差必为极大。前面一項的最大値是 $\cosh^2\rho$，而函数 $\cosh x$ 对 x 的正値是单調上升函数，故 x 最大时，$\cosh x$ 也最大。此时卽 $\sin\varphi=1$，相应的 $\cos\varphi=0$，故显然在 $M=\pm\frac{\pi}{2}$ 时，第二項为最小(等于零)。因此(8)式的极大値为 $\cosh^2\rho$。

$$f(\rho)=\max|\sin(M+\rho\varepsilon^{\sqrt{-1}\varphi})|=\cosh\rho,\tag{9}$$

卽

$$\frac{\rho_1}{f(\rho_1)}=\frac{\rho}{\cosh\rho}=\frac{2\rho}{\varepsilon^{\rho}+\varepsilon^{-\rho}}.\tag{10}$$

現在来求出当(10)式为最大时，ρ 的数値(卽 ρ_1)。令(10)式对 ρ 的导数等于0，得

$$\frac{2(\varepsilon^{\rho}+\varepsilon^{-\rho})-2\rho(\varepsilon^{\rho}-\varepsilon^{-\rho})}{(\varepsilon^{\rho}+\varepsilon^{-\rho})^2}=0,$$

卽

$$\varepsilon^{\rho}(\rho-1)-\varepsilon^{-\rho}(\rho+1)=0.\tag{11}$$

(11)式在 $\rho=1$ 时为負，在 $\rho=2$ 时为正，故有一根在1和2之間，卽为所求的 ρ_1。用方程式的数字解法求出得

$$\rho_1 = 1.19967\cdots,$$

則

$$e_1 = \frac{2\rho_1}{\varepsilon^{\rho_1} + \varepsilon^{-\rho_1}} = 0.6627\cdots. \tag{12}$$

e_1 就是 e 的极大值。也就是說，如果要利用拉格朗日級数来展开 E 的函数，必需要 $e<0.6627\cdots$ 方有效。这个証明是由拉普拉斯首先提出的[1]，故称为拉普拉斯极限。

在太阳系中，有些小行星已超过这个限度，很多周期彗星也是，因此它們不能应用拉格朗日級数来展开。事实上，对 e 比較大的天体，虽然还不到 0.6627…，所得的展开式已收斂得很慢，不合实用。

§ 15 用拉格朗日級数来展开椭圓运动的坐标

前面已讲了拉格朗日級数的情况，現在利用它来展开椭圓运动的坐标。

一、展开 E

根据克普勒方程

$$E = M + e\sin E, \tag{1}$$

与 (2-12-1) 式比較得 $y=E$，$x=M$，$\alpha=e$，$\varphi(y)=\sin E$。故在 (2-12-13) 式中，令 $F(y)=E$，則

$$F_x = M, \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial M} = 1, \quad \phi_x = \sin M.$$

故得

$$E = M + \frac{e}{1!}\sin M + \frac{e^2}{2!}\frac{\partial}{\partial M}(\sin^2 M) + \cdots$$
$$+ \frac{e^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}(\sin^n M)\cdots. \tag{2}$$

[1] 参看 Laplace 著：Mécanique Céleste, Tom.V, Supplement.

但由三角函数性质知(可由欧拉公式証明)

$$\left.\begin{aligned}\sin^{2m} M &= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\Big[\cos 2mM - 2m\cos(2m-2)M\\&\quad + \cdots + (-1)^m\frac{(2m)!}{(m!)^2}\Big],\\ \sin^{2m+1} M &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}}\Big[\sin(2m+1)M\\&\quad - (2m+1)\sin(2m-1)M + \cdots\\&\quad + (-1)^m\frac{(2m+1)!}{(m+1)!\,m!}\sin M\Big].\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

因此

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^{2m-1}}{\partial M^{2m-1}}(\sin^{2m} M) &= \frac{1}{2^{2m-1}}\big[(2m)^{2m-1}\sin 2mM\\&\quad - 2m(2m-2)^{2m-1}\sin(2m-2)M + \cdots\big];\\ \frac{\partial^{2m}}{\partial M^{2m}}(\sin^{2m+1} M) &= \frac{1}{2^{2m}}\big[(2m+1)^{2m}\sin(2m+1)M\\&\quad - (2m+1)(2m-1)^{2m}\sin(2m-1)M + \cdots\big].\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

两式合并后即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}(\sin^n M) &= \frac{1}{2^{n-1}}\Big[n^{n-1}\sin nM\\&\quad - n(n-2)^{n-1}\sin(n-2)M + \cdots\\&\quad + (-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-2k)^{n-1}\sin(n-2k)\Big],\end{aligned}\qquad(5)$$

其中 k 根据 n 为奇数或偶数而定，n 为偶数則 $k=\frac{n}{2}-1$；n 为奇数則 $k=\frac{n-1}{2}$。

以(4)代入(2)式得(只写到 e^5)

$$E = M + \frac{e}{1!}\sin M + \frac{e^2}{2!}\sin 2M$$

$$+ \frac{e^3}{3!\,2^2}(3^2\sin 3M - 3\sin M)$$

$$+\frac{e^4}{4!2^3}(4^3\sin 4M-4\times 2^3\sin 2M)$$

$$+\frac{e^5}{5!2^4}(5^4\sin 5M-5\times 3^4\sin 3M+10\sin M)$$

$$+\frac{e^6}{6!2^5}(6^5\sin 6M-6\times 4^5\sin 4M$$

$$+15\times 2^5\sin 2M)+\cdots. \tag{6}$$

二、展开 $\frac{r}{a}$

由于
$$\frac{r}{a}=1-e\cos E,$$

故首先要展开 $\cos E$. 只須在上面討論中令 $F(y)=\cos E$, 即得

$$\cos E=\cos M+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}\left(\sin^n M\frac{d\cos M}{dM}\right)$$

$$=\cos M-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}(\sin^{n+1}M).$$

根据(3)式可得出它的展开式。因此

$$\frac{r}{a}=1-e\cos E=1-e\cos M+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+1}}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}(\sin^{n+1}M)$$

$$=1-e\cos M-\frac{e^2}{2}(\cos 2M-1)-\frac{e^3}{2!2^2}(3\cos 3M-3\cos M)$$

$$-\frac{e^4}{3!2^3}(4^2\cos 4M-4\times 2^2\cos 2M)$$

$$-\frac{e^5}{4!2^4}(5^3\cos 5M-5\times 3^3\cos 3M+10\cos M)$$

$$-\frac{e^6}{5!2^5}(6^4\cos 6M-6\times 4^4\cos 4M$$

$$+15\times 2^4\cos 2M)+\cdots. \tag{7}$$

三、展开行星在軌道平面上的直角坐标 (ξ, η)

根据

$$\left.\begin{aligned}\xi &= r\cos f = a(\cos E - e),\\ \eta &= r\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin E,\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

因此得
$$\begin{aligned}\frac{\xi}{a} = \cos E - e = \cos M &+ \frac{e}{2}(\cos 2M - 3)\\
&+ \frac{e^2}{2!\,2^2}(3\cos 3M - 3\cos M)\\
&+ \frac{e^3}{3!\,2^3}(4^2\cos 4M - 4\times 2^2\cos 2M)\\
&+ \frac{e^4}{4!\,2^4}(5^3\cos 5M - 5\times 3^3\cos 3M + 10\cos M)\\
&+ \frac{e^5}{5!\,2^5}(6^4\cos 6M - 6\times 4^4\cos 4M\\
&+ 15\times 2^4\cos 2M) + \cdots;\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{a} &= \sqrt{1-e^2}\sin E = \sqrt{1-e^2}\Big[\sin M\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}\left(\sin^n M\frac{d\sin M}{dM}\right)\Big]\\
&= \sqrt{1-e^2}\left[\sin M + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(n+1)!}\frac{\partial^n}{\partial M^n}(\sin^{n+1}M)\right]\\
&= \sqrt{1-e^2}\Big[\sin M + \frac{e}{2}\sin 2M\\
&\quad + \frac{e^2}{3!\,2^2}(3^2\sin 3M - 3\sin M)\\
&\quad + \frac{e^3}{4!\,2^3}(4^3\sin 4M - 4\times 2^3\sin 2M)\\
&\quad + \frac{e^4}{5!\,2^4}(5^4\sin 5M - 5\times 3^4\sin 3M + 10\sin M)\\
&\quad + \frac{e^5}{6!\,2^5}(6^5\sin 6M - 6\times 4^5\sin 4M\\
&\quad + 15\times 2^5\sin 2M + \cdots.\end{aligned}\tag{10}$$

这些展开式只有在 $e<0.6627\cdots$ 时才能应用。对于 e 接近 1

的軌道，需要用別的方法进行展开，例如展为

$$\lambda=\frac{1-e}{1+e}$$

的級数❶。

§ 16 白塞耳函数及其基本性质

为了展开椭圓运动的坐标为三角級数，用白塞耳函数比較方便。下面先讲它的定义。

1. 定义一个 x 和 Z 的函数 U 为

$$U=e^{\frac{x}{2}(Z-Z^{-1})}=e^{\frac{x}{2}Z}e^{-\frac{x}{2}Z^{-1}},\tag{1}$$

其中 x 为实变量，Z 为复变量，e 即为自然对数的底。

由于

$$e^{\frac{x}{2}Z}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}Z\right)^{p}}{p!},\quad e^{-\frac{x}{2}Z^{-1}}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x}{2}Z^{-1}\right)^{q}}{q!},\tag{2}$$

$$U=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+q}}{p!\,q!}Z^{p-q}.\tag{3}$$

如果令 $p-q=n$，则 $p=q+n$，代入上式得

$$\begin{aligned}U&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}}{(n+q)!\,q!}Z^{n}\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}}{(n+q)!\,q!}\right]Z^{n}.\end{aligned}\tag{4}$$

定义

$$J_n(x)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}}{(n+q)!\,q!},\tag{5}$$

---

❶ 参看 Moulton 著：Introduction to Celestial Mechanics, Chapt. 5.

则
$$U=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)Z^n$$
$$=J_0(x)+J_1(x)Z+J_2(x)Z^2+\cdots$$
$$+J_{-1}(x)Z^{-1}+J_{-2}(x)Z^{-2}+\cdots. \qquad (6)$$

(5) 式所定义的 $J_n(x)$ 就是第一类白塞耳函数。它是两个变量 n 和 x 的函数，其中 n 是整数，x 为任意实数。

下面介紹一些白塞耳函数的性质。

2. 由 (1) 式可知，在 U 中如果把 Z 换成 $-Z$，则 U 仍然不变。因此，在 (6) 式中，把 Z 换成 $-Z$ 后得
$$U=J_0(x)-J_1(x)Z^{-1}+J_2(x)Z^{-2}-\cdots$$
$$-J_{-1}(x)Z+J_{-2}(x)Z^2-\cdots$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^nJ_{-n}(x)Z^n. \qquad (7)$$

同 (6) 式比較即得
$$\left.\begin{aligned}&J_{-1}(x)=-J_1(x),\quad J_{-2}(x)=J_2(x),\quad\cdots,\\&J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x).\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

这就是一个性质。

3. 由 (5) 式直接可看出
$$J_n(-x)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q\left(-\dfrac{x}{2}\right)^{n+2q}}{(n+q)!\,q!}$$
$$=(-1)^n\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+2q}}{(n+q)!\,q!}$$
$$=(-1)^nJ_n(x). \qquad (9)$$

这是它的另一个性质。同 (8) 式比較可得
$$J_{-n}(x)=J_n(-x)$$

及
$$J_{-n}(-x)=J_n(x). \qquad (10)$$

4. 由 $$U=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)Z^n=e^{\frac{x}{2}(Z-Z^{-1})},$$

故 $$\frac{\partial U}{\partial Z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}nJ_n(x)Z^{n-1}=\frac{x}{2}(1+Z^{-2})U$$

$$=\frac{x}{2}(1+Z^{-2})\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)Z^n$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)Z^n+\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)Z^{n-2}.$$

比較 Z 的 $n-1$ 次同次冪項得

$$nJ_n(x)=\frac{x}{2}J_{n-1}(x)+\frac{x}{2}J_{n+1}(x),$$

即

$$J_n(x)=\frac{x}{2n}[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)].\tag{11}$$

(11)式表示連續三个白塞耳函数之間的关系。如果知道 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$，則根据(11)式可继續求出 $J_2(x)$，$J_3(x)$，…。

5. 由 $$\frac{\partial U}{\partial x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{dJ_n(x)}{dx}Z^n=\frac{1}{2}(Z-Z^{-1})U$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)Z^{n+1}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)Z^{n-1}\right],$$

比較 Z^n 的系数可得

$$\frac{dJ_n(x)}{dx}=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)].\tag{12}$$

如果令 $$J'_n(x)=\frac{dJ_n(x)}{dx},$$

則 $$J'_n(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)].\tag{13}$$

同理 $$J''_n(x)=\frac{1}{2}[J'_{n-1}(x)-J'_{n+1}(x)]$$

$$=\frac{1}{4}[J_{n-2}(x)-2J_n(x)+J_{n+2}(x)]$$

$$= -J_n(x) + \frac{1}{4}[J_{n-2}(x) + J_n(x)$$
$$+ J_n(x) + J_{n+2}(x)]。$$

但根据(11)式得

$$J_{n-2}(x) + J_n(x) = \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1}(x),$$

$$J_n(x) + J_{n+2}(x) = \frac{2(n+1)}{x} J_{n-1}(x),$$

代入上式得

$$J''_n(x) = -J_n(x) + \frac{1}{2x}[(n-1)J_{n-1}(x) + (n+1)J_{n+1}(x)]$$

$$= -J_n(x) + \frac{1}{2x}\{n[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$
$$- J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\}。$$

再利用(11)，(13)式可得

$$J''_n(x) = -J_n(x) + \frac{n^2}{x^2} J_n(x) - \frac{1}{x} J'_n(x),$$

即

$$J''_n(x) + \frac{1}{x} J'_n(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0。 \quad (14)$$

也就是說，$J_n(x)$为微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (15)$$

的解。这个方程就叫做贝塞耳方程。

6. 在
$$e^{\frac{x}{2}(Z-Z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) Z^n \quad (16)$$

中，把 Z 换成 Z^{-1} 則得

$$e^{-\frac{x}{2}(Z-Z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) Z^{-n}。 \quad (17)$$

把(16)，(17)两式两端相乘后得

$$1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n^2(x)+\text{含 } Z \text{ 的項。}$$

但此式与 Z 无关，故比較两端不含 Z 的系数得

$$1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n^2(x)=J_0^2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(x)+\sum_{n=-\infty}^{-1}J_n^2(x)$$

$$=J_0^2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}^2(x).$$

由(8)知 $$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x),$$

代入上式即得

$$1=J_0^2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(x)$$

$$=J_0^2(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(x). \tag{18}$$

(18)式右端的每一項都是正数(或为 0)，因此可知

$$|J_0(x)|\leqslant 1,\quad |J_n(x)|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\quad (n=1,2,\cdots). \tag{19}$$

7. 在(5)式中，白塞耳函数是用級数表示的，但在天体力学中还用定积分来表示。由(6)式知

$$\varepsilon^{\frac{x}{2}(Z-Z^{-1})}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(x)Z^m.$$

令

$$Z=\varepsilon^{\sqrt{-1}\theta}, \tag{20}$$

則上式成为

$$\varepsilon^{\sqrt{-1}x\sin\theta}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(x)\varepsilon^{\sqrt{-1}m\theta}. \tag{21}$$

两端乘以 $\varepsilon^{-\sqrt{-1}n\theta}d\theta$，再按 θ 从 0 到 2π 进行积分得

$$\int_0^{2\pi}\varepsilon^{+\sqrt{-1}(x\sin\theta-n\theta)}d\theta=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}J_m(x)\int_0^{2\pi}\varepsilon^{\sqrt{-1}(m-n)\theta}d\theta. \tag{22}$$

但积分 $$\int_0^{2\pi}\varepsilon^{\sqrt{-1}p\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}(\cos p\theta+\sqrt{-1}\sin p\theta)d\theta$$

$$=\begin{cases}0, & \text{若 } p\neq 0;\\ 2\pi, & \text{若 } p=0.\end{cases}$$

故(22)式中右端只有 $m=n$ 那項存在,其它的 $m\neq n$ 的項都等于 0,卽得

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^{\sqrt{-1}(x\sin\theta-n\theta)}\,d\theta=2\pi J_n(x).$$

但左端的积分为复数，而右端为实数，因此左端只应取实数部分，卽

$$\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta=2\pi J_n(x).$$

左端的积分可分为两个：一个的积分限由 0 到 π，另一个为 π 到 2π;后面那个用 $\theta'=2\pi-\theta$ 代换后結果与前面一样。因此得

$$2\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta=2\pi J_n(x).$$

于是

$$\begin{aligned}J_n(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)\,d\theta\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta.\end{aligned}\tag{23}$$

关于白塞耳函数的性质,在这里只讲这些,其它性质在天体力学中用得很少,不再讲了。

§17 用白塞耳函数展开椭圓运动的坐标

因椭圓运动的坐标都是周期函数，故可利用傅里哀級数来进行展开。关于傅里哀級数的理論,大家在数学分析中已学过了,現在只提出下面的結論。

設 $f(M)$ 为 M 的一个周期函数，滿足狄氏条件，周期为 2π，则 $f(M)$ 可表示成为三角級数

$$f(M)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nM+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nM,\tag{1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\cos nM\,dM,\\ B_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(M)\sin nM\,dM.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

如果$f(M)$为M的偶函数，则有

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(M)\cos nM\,dM,\\ B_n&=0;\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

如果$f(M)$为M的奇函数，则有

$$\left.\begin{aligned}A_n&=0,\\ B_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(M)\sin nM\,dM.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

下面就利用这个結果来进行展开。

1. 展开$\cos kE$为M的三角級数（下面k都表示整数）。因

$$E-e\sin E=M,\tag{5}$$

故当M增加2π时，E也增加2π。因此$\cos kE$也是M的周期函数，周期仍为2π，而且为偶函数。故应有

$$\cos kE=\frac{1}{2}A_{k,0}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{k,n}\cos nM,\tag{6}$$

$$\begin{aligned}A_{k,n}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kE\cos nM\,dM\\ &=\frac{2}{\pi n}[\cos kE\sin nM]_0^{\pi}+\frac{2k}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin kE\sin nM\,dE\\ &=\frac{k}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nM-kE)\,dE-\frac{k}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nM+kE)\,dE.\end{aligned}$$

将(5)式的M代入得

$$\begin{aligned}A_{k,n}=&\frac{k}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos\{(n-k)E-ne\sin E\}\,dE\\ &-\frac{k}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos\{(n+k)E-ne\sin E\}\,dE.\end{aligned}$$

据(2–16–23)式得：

$$A_{k,n}=\frac{k}{n}[J_{n-k}(ne)-J_{n+k}(ne)] \quad (x=ne), \tag{7}$$

$$A_{k,0}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kEdM.$$

以 $M=E-e\sin E$ 代入得

$$\begin{aligned}A_{k,0}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kE(1-e\cos E)dE\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kEdE-\frac{e}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k+1)EdE\\&\quad-\frac{e}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k-1)EdE\\&=\begin{cases}0, & 若 k\neq 1;\\ -e, & 若 k=1.\end{cases}\end{aligned} \tag{8}$$

以(7)，(8)两式代入(6)，在 $k\neq 1$ 时可得

$$\cos kE=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n}[J_{n-k}(ne)-J_{n+k}(ne)]\cos nM,$$

而

$$\cos E=-\frac{e}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n-1}(ne)-J_{n+1}(ne)]\cos nM, \tag{9}$$

利用 (2–16–13) 式　$\cos E=-\frac{e}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}J'_n(ne)\cos nM$

$$=-\frac{e}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\frac{d}{de}[J_n(ne)]\cos nM. \tag{10}$$

2. 展开 $\sin kE$ 为 M 的三角函数。因 $\sin kE$ 为 M 的奇函数，周期仍为 2π，故有

$$\sin kE=\sum_{n=1}^{\infty}B_{k,n}\sin nM, \tag{11}$$

其中　$$B_{k,n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kE\sin nM\cdot dM.$$

同上面一样，可得

$$B_{k,n}=\frac{k}{n\pi}\int_0^\pi[\cos(kE+nM)+\cos(nM-kE)]dE$$

$$=\frac{k}{n}[J_{n+k}(ne)+J_{n-k}(ne)]. \tag{12}$$

但在 $k=1$ 时，

$$B_{1,n}=\frac{1}{n}[J_{n+1}(ne)+J_{n-1}(ne)],$$

利用 (2-16-11) 式 $=\dfrac{2}{ne}J_n(ne)$. (13)

$$\sin kE=k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n+k}(ne)+J_{n-k}(ne)]\sin nM, \tag{14}$$

$$\sin E=\frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM. \tag{15}$$

3. 展开 E 为 M 的三角級数。由

$$E=M+e\sin E,$$

以(15)式代入得

$$E=M+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM. \tag{16}$$

4. 展开$\dfrac{r}{a}$为 M 的三角級数。由于

$$\frac{r}{a}=1-e\cos E,$$

以(10)式代入得

$$\frac{r}{a}=1+\frac{e^2}{2}-2e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{d}{de}[J_n(ne)]\cos nM. \tag{17}$$

5. 展开$\dfrac{a}{r}$为 M 的三角級数。由(5)可得

$$\frac{dM}{dE}=1-e\cos E=\frac{r}{a},$$

则

$$\frac{a}{r}=\frac{dE}{dM},$$

以(16)式代入得

$$\frac{a}{r}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos nM. \tag{18}$$

6．展开 $\cos f$ 为 M 的三角級数。由于

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f},$$

則
$$e\cos f=-1+(1-e^2)\frac{a}{r}.$$

以(18)式代入得

$$e\cos f=-1+(1-e^2)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos nM\right],$$

因此

$$\cos f=-e+\frac{2(1-e^2)}{e}\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos nM. \tag{19}$$

7．展开 $\sin f$ 为 M 的三角級数。由于

$$r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E,$$

而由 $r=a(1-e\cos E)$ 得 $\frac{dr}{dE}=ae\sin E$，代入上式得

$$r\sin f=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dr}{dE}.$$

但
$$\frac{dr}{dE}=\frac{dr}{dM}\cdot\frac{dM}{dE}=\frac{r}{a}\frac{dr}{dM}=r\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right),$$

代入上式卽得

$$\sin f=\frac{1}{e}\sqrt{1-e^2}\,\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right),$$

以(17)式代入得

$$\sin f=2\sqrt{1-e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{d}{de}[J_n(ne)]\sin nM. \tag{20}$$

8．展开直角坐标 ξ, η 为 M 的三角級数。由于

$$\xi=r\sin f=a(\cos E-e),$$

以(10)式代入得

$$\frac{\xi}{a}=\cos E-e=-\frac{3}{2}e+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{d}{de}[J_n(ne)]\cos nM. \quad (21)$$

$$\eta=a\sqrt{1-e^2}\sin E,$$

以(15)式代入得

$$\frac{\eta}{a}=\sqrt{1-e^2}\,\frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM. \quad (22)$$

9．展开 $\frac{\xi}{r^3}$，$\frac{\eta}{r^3}$ 为 M 的三角级数。由二体問題的运动方程

$$\ddot{\xi}=\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\frac{\mu\xi}{r^3},\quad \ddot{\eta}=\frac{d^2\eta}{dt^2}=-\frac{\mu\eta}{r^3}, \quad (23)$$

又由

$$M=n(t-\tau)=\sqrt{\mu}\,a^{-\frac{3}{2}}(t-\tau), \quad (24)$$

则

$$dM=\sqrt{\mu}\,a^{-\frac{3}{2}}dt,$$

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\xi}{dM}\frac{dM}{dt}=\sqrt{\mu}\,a^{-\frac{3}{2}}\frac{d\xi}{dM},$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\mu a^{-3}\frac{d^2\xi}{dM^2}.$$

同理

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\mu a^{-3}\frac{d^2\xi}{dM^2}.$$

代入(23)式得

$$-\frac{\mu\xi}{r^3}=\frac{d^2\xi}{dt^2}=\mu a^{-3}\frac{d^2\xi}{dM^2},$$

即

$$\frac{\xi}{r^3}=-a^{-3}\frac{d^2\xi}{dM^2}=-a^{-2}\frac{d^2}{dM^2}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

同理

$$\frac{\eta}{r^3}=-a^{-2}\frac{d^2}{dM^2}\left(\frac{\eta}{a}\right). \quad (25)$$

以(21)，(22)式代入得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\xi}{r^3} &= \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{de}\left[J_n(ne)\right]\cos nM,\\
\frac{\eta}{r^3} &= -\frac{2\sqrt{1-e^2}}{a^2 e}\sum_{n=1}^{\infty} nJ_n(ne)\sin nM.
\end{aligned}\right\}\tag{26}
$$

10. 到現在为止，橢圓运动中用到的量都已展开成 M 的三角級数了，但有时还要用到 E 和 f 之間的級数关系。这里不用白塞耳函数，用另一种更簡单的方法。先証明下面的定理。

定理　若

$$\operatorname{tg} y=\alpha \operatorname{tg} x \quad (\alpha>0),\tag{27}$$

則

$$
\begin{aligned}
y=x&+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\sin 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2\sin 4x\\
&+\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^3\sin 6x+\cdots.
\end{aligned}\tag{28}
$$

証　由(27)式知

$$\frac{\varepsilon^{\sqrt{-1}y}-\varepsilon^{-\sqrt{-1}y}}{\varepsilon^{\sqrt{-1}y}+\varepsilon^{-\sqrt{-1}y}}=\alpha\frac{\varepsilon^{\sqrt{-1}x}-\varepsilon^{-\sqrt{-1}x}}{\varepsilon^{\sqrt{-1}x}+\varepsilon^{-\sqrt{-1}x}}.$$

令

$$\varepsilon^{\sqrt{-1}y}=\eta,\qquad \varepsilon^{\sqrt{-1}x}=\xi,\tag{29}$$

則上式成为

$$\frac{\eta-\eta^{-1}}{\eta+\eta^{-1}}=\alpha\frac{\xi-\xi^{-1}}{\xi+\xi^{-1}},$$

或

$$\frac{\eta^2-1}{\eta^2+1}=\alpha\frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}.$$

解出 η^2 得

$$\eta^2=\xi^2\frac{1-\beta\xi^{-2}}{1-\beta\xi^2},\ \text{其中}\ \beta=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}.\tag{30}$$

两端取自然对数(因 $\eta=\varepsilon^{\sqrt{-1}y}$，　$\xi=\varepsilon^{\sqrt{-1}x}$，故 $\ln\eta=\sqrt{-1}y$，$\ln\xi=\sqrt{-1}x$)，得

$$2\sqrt{-1}y=2\sqrt{-1}x+\ln(1-\beta\xi^{-2})-\ln(1-\beta\xi^2).$$

因 $|\beta|<1$，而 $|\xi|=|e^{\sqrt{-1}x}|=1$，故 $|\beta\xi^2|<1$，$|\beta\xi^{-2}|<1$，故可用对数級数展开。因此上式成为

$$2\sqrt{-1}y=2\sqrt{-1}x-\beta\xi^{-2}-\frac{1}{2}\beta^2\xi^{-4}-\frac{1}{3}\beta^3\xi^{-6}+\cdots$$

$$+\beta\xi^2+\frac{1}{2}\beta^2\xi^4+\frac{1}{3}\beta^3\xi^6+\cdots$$

$$=2\sqrt{-1}x+\beta(\xi^2-\xi^{-2})+\frac{\beta^2}{2}(\xi^4-\xi^{-4})$$

$$+\frac{\beta^3}{3}(\xi^6-\xi^{-6})+\cdots.$$

$$\therefore\qquad y=x+\beta\frac{\xi^2-\xi^{-2}}{2\sqrt{-1}}+\frac{\beta^2}{2}\frac{\xi^4-\xi^{-4}}{2\sqrt{-1}}+\frac{\beta^3}{3}\frac{\xi^6-\xi^{-6}}{2\sqrt{-1}}+\cdots$$

$$=x+\beta\sin 2x+\frac{1}{2}\beta^2\sin 4x+\frac{1}{3}\beta^3\sin 6x+\cdots.$$

这正是要證明的(28)式。

現在利用(28)式来展开 f 为 E 的級数。由

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

同(27)式比較得

$$y=\frac{f}{2},\quad x=\frac{E}{2},\quad \alpha=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

$$\beta=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}.$$

因此
$$\frac{f}{2}=\frac{E}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^n\sin nE,$$

$$f=E+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^n\sin nE. \tag{31}$$

反之，由
$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{f}{2},$$

則
$$\alpha=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}},$$

$$\beta=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

$$E=f+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^n\sin nf. \tag{32}$$

(31)，(32)两式就是所要求的展开式。

§18 抛射問題

前面讲过了关于二体問題的理論，下面几节将讲把二体問題应用于宇宙航行的問題。現在先讲一般的抛射問題。

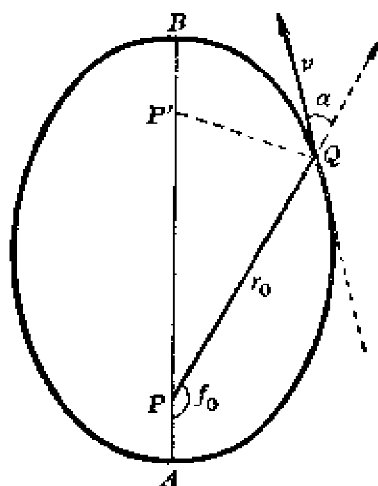


图 15

設一天体 P 质量为 M（可当作质点看待），在距离 P 为 r_0 处发射一火箭，发射点为 Q（图 15）。設相对于天体的速度为 v，与向徑的交角为 α。

首先討論軌道的性质問題。由公式

$$v^2=GM\left(\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a}\right) \tag{1}$$

知（略去火箭质量），当

$$v^2=GM\frac{1}{r_0}=v_c^2,\text{ 而且 }\alpha=90^\circ$$

时，軌道为圆形；当 $v<v_c$ 时为椭圆；当 $v^2=GM\frac{2}{r_0}=v_p^2$ 时，軌道为抛物綫；$v_p>v>v_c$ 时，軌道仍为椭圆；$v>v_p$ 时，軌道为双曲綫；若 $v=v_c$，而 $\alpha\neq 90^\circ$ 时，軌道也为椭圆。因此，在一般情形下，軌道都是椭圆或双曲綫。要使发射的軌道严格成圆形或抛物綫，在实际上都是不可能的。下面先来討論椭圆軌道的情形，找出根据 (v,α) 来計算此椭圆軌道的軌道根数公式。因为这是平面問題，只要求出 a，e，长徑方向（可用 f_0 表示），經过近星点 A 的时刻。

半长徑 a 可直接由(1)式求出。因 $v^2<GM\frac{2}{r_0}$，故 $a>0$。至

于偏心率 e，可先求出通徑 p。根据面积定律知

$$r^2\frac{df}{dt}=h=\sqrt{GMp}.$$

但 $$r\frac{df}{dt}=v\sin\alpha,\ 即\ \sqrt{GMp}=rv\sin\alpha$$

对椭圓上任一点的 r, v, α 都成立，对发射点 Q 也应成立。郎得

$$\sqrt{GMp}=r_0v\sin\alpha,\quad 故\ p=\frac{r_0^2v^2\sin^2\alpha}{GM},\tag{2}$$

从而可求出 p。从 p, a 郎得

$$e^2=1-\frac{p}{a}.\tag{3}$$

知道 p, e 后，椭圓方程可写出为

$$r=\frac{p}{1+e\cos f}.$$

对 Q 点而言有

$$r_0=\frac{p}{1+e\cos f_0},$$

郎

$$\cos f_0=\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_0}-1\right),\tag{4}$$

由此可求出 f_0。

关于 f_0 的象限，可以唯一确定。因为 α（与向徑正方向交角）$<90^\circ$ 时，f_0 应在第一、二象限，而 $\cos f_0$ 在第一象限为正，在第二象限为負，故由 $\cos f_0$ 的符号可唯一确定 f_0 的象限；若 $\alpha>90^\circ$ 时，f_0 应在第三、四象限，也可根据 $\cos f_0$ 的符号来决定 f_0 的象限。

从 f_0 可求出偏近点角 E_0。由

$$\operatorname{tg}\frac{E_0}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{f_0}{2},\tag{5}$$

而 $\frac{f_0}{2}$ 与 $\frac{E_0}{2}$ 同象限，故 E_0 的象限也可唯一确定。由 E_0 郎得平

近点角

$$M_0 = E_0 - e\sin E_0. \tag{6}$$

再由

$$M_0 = n(t-\tau), \tag{7}$$

其中 $n=\sqrt{GM}a^{-\frac{3}{2}}$，$t$ 为发射时刻，都是已知，可求出过近星点的时刻 τ，于是問題得到解決。

至于双曲綫軌道的情形，与橢圓完全相同，只是公式形式上有些差別。根据 §4 的公式，用上面討論的方法知有下列結果：

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r_0}+\frac{1}{a}\right), \tag{1'}$$

$$p = \frac{r_0^2 v^2 \sin^2\alpha}{GM}; \tag{2'}$$

$$e^2 = 1+\frac{p}{a}, \tag{3'}$$

$$\cos f_0 = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_0}-1\right), \tag{4'}$$

$$\tanh\frac{F_0}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\,\mathrm{tg}\frac{f_0}{2}, \tag{5'}$$

$$e\sinh F_0 - F_0 = \nu(t-\tau). \tag{6'}$$

其中 $\nu=\sqrt{GM}\,a^{-\frac{3}{2}}$，从上面(1′)～(6′)可求出 a，e，f_0，τ。

圓形軌道和拋物綫軌道可作为橢圓軌道的特例。

§19 第三宇宙速度

从地面发射火箭能跑出太阳系所需要的最小速度，称为第三宇宙速度，这是宇宙航行中很重要的基本常数。火箭发射是在地面，主要受地球影响。但火箭离地球愈远，則受到地球影响愈小，而受太阳的影响逐漸增大，成为主要影响。从近似观点看来，可在地球附近选擇某一范圍，在这范圍內，只考慮地球的影响，火箭按

地球吸引运动为二体問題；在此范圍外，可以只考慮太阳的影响。这个范圍称为地球的引力作用范圍，在近似討論中很重要。

关于引力作用范圍的大小，有两种不同的定义。一种是以中和点为边界，卽在边界上火箭受到地球引力与太阳引力大小相等。由于引力和质量成正比，与距离平方成反比，故此范圍边界可近似地看成一个以地球为中心的球面，半徑

$$\rho'=A\left(\frac{E}{S}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\frac{A}{577}=260000\text{ 公里。}$$

其中 A 为地球到太阳的平均距离，卽天文单位。这个数值一般人不采用，常用下面的另一个定义。

若火箭在地球和太阳联綫之間，与地球距离为 r，与太阳距离为 R，則 $R+r=A$。若把火箭看成主要受地球吸引，則設地球的吸引力为 F，太阳对火箭的摄动力为 ΔF，此时得到一个比值 $\frac{\Delta F}{F}$；另一方面，若把火箭看成主要是受太阳的吸引，吸引力为 F'，地球对它的摄动力設为 $\Delta F'$，又可得一比值 $\frac{\Delta F'}{F'}$。在 $\frac{\Delta F}{F}=\frac{\Delta F'}{F'}$ 时，称为火箭在地球引力范圍的边界上。

利用这个定义可求出地球引力作用范圍的大小。根据上面定义，

$$F=\frac{GmE}{r^2},\qquad F'=\frac{GmS}{(A-r)^2},$$

$$\frac{\Delta F}{m}=\frac{GS}{(A-r)^2}-\frac{GS}{A^2}=\frac{GS(2Ar-r^2)}{A^2(A-r)^2},$$

$$\frac{\Delta F'}{m}=\frac{GE}{r^2}-\frac{GE}{A^2}=\frac{GE(A^2-r^2)}{A^2r^2},$$

因此

$$\frac{\Delta F}{F}=\frac{r^2(2Ar-r^2)}{A^2(A-r)^2}\frac{S}{E}\approx\frac{2r^3}{A^3}\frac{S}{E}\quad(\text{因 }A\gg r),$$

$$\frac{\Delta F'}{F'}=\frac{(A^2-r^2)(A-r)^2}{A^2r^2}\frac{E}{S}\approx\frac{A^2}{r^2}\frac{E}{S}.$$

在 $\frac{\Delta F}{F}=\frac{\Delta F'}{F'}$ 时，有关系 $r^5=\frac{A^5}{2}\left(\frac{E}{S}\right)^2$，即

$$r=\frac{A}{\sqrt[5]{2}}\left(\frac{E}{S}\right)^{\frac{2}{5}}. \tag{1}$$

习惯上略去上式中的$\sqrt[5]{2}$，直接取地球引力作用范圍的半徑为 $\rho_*=A\left(\frac{E}{S}\right)^{\frac{2}{5}}=930000$ 公里。也就是說，可近似地认为，火箭与地球距离小于 ρ_* 时，可以只考虑地球的吸引；大于 ρ_* 时，只考虑太阳的吸引。这都是二体問題。

首先考虑在地球軌道上，要用多大速度才能脱离太阳吸引，飞出太阳系。这个速度就是在距离太阳为 A 处的抛物綫速度 V_p，即

$$V_p^2=GS\frac{2}{A}=2V_0^2. \tag{2}$$

其中 V_0 为地球公轉速度，即 $V_p=\sqrt{2}V_0=42.4$ 公里/秒。故火箭到达地球引力作用范圍外时，相对于太阳的速度至少为 V_p 才能飞出太阳系。若火箭飞出地球引力作用范圍时，运动方向与地球公轉方向一致，则此时相对于地球的速度大小应为

$$v'=V_p-V_0=12.4 \text{ 公里/秒}。$$

如果方向不一致，v' 应更大。对于火箭到地球引力作用范圍边界时的速度 v'，相应的地面发射速度 v 就是第三宇宙速度。

在地面用速度 v 发射，軌道显然是双曲綫。設地球半徑为 r_0，地球质量为E。則有

$$v^2=GE\left(\frac{2}{r_0}+\frac{1}{a}\right).$$

由于在地球引力作用范圍边界上速度为 v'，故有

$$v'^2=GE\left(\frac{2}{\rho_*}+\frac{1}{a}\right).$$

$$v^2-v'^2=2GE\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{\rho_*}\right).$$

因 $r_0=6378$ 公里，$\rho_*=930000$ 公里 $\approx 150r_0$，在这里的討論中 $\frac{1}{\rho_*}$ 可略去。卽

$$v^2-v'^2=\frac{2GE}{r_0}=v_p^2$$

(v_p 卽为地面的抛物綫速度，卽第二宇宙速度，等于 11.17 公里/秒)。故

$$v^2=v_p^2+v'^2,\quad v=\sqrt{v_p^2+v'^2}=16.9\ \text{公里/秒。}$$

§ 20 向大行星发射宇宙火箭的問題

向大行星发射宇宙火箭的基本近似方案，可用二体問題来解决。

向外行星发射火箭的情况完全相同，这里用火星作为例子，先考虑能达到火星軌道的最小速度。設地球和火星的軌道都是圓形，而且在同一平面上(图 16)。設 E 点为火箭飞出地球引力作用范圍边界时的位置。容易看出，在以太阳为焦点通过 E 点的并能到达火星的一切椭圓軌道中，最小軌道(半长徑最小)是旣在 E 点与地球軌道相切，又在与 E 相对之 B 点与火星軌道相切(如图)。这种軌道称为霍赫曼(Hochmann)軌道。

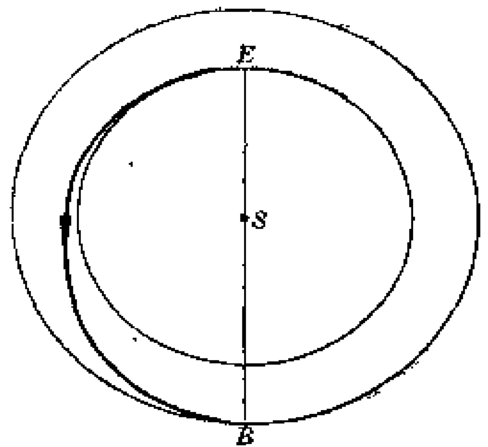


图 16

由于 E 点的发射速度与地球軌道相切，故可以充分利用地球公轉速度。这个軌道的長徑应为 EB，卽地球軌道半徑与火星軌道半徑的和。如以天文单位作長度单位，則此軌道的長徑 $2a_{火箭}=1+r_{火星}$ ($r_{火星}$ 为火星軌道半徑)，因此 $a_{火箭}=\frac{1+r_{火星}}{2}$ 为已知，故在 E 点的

速度 $V_{火箭}$ 应为

$$V_{火箭}^2=GS\left(2-\frac{1}{a_{火箭}}\right). \tag{1}$$

由(1)式可求出 $V_{火箭}$，它应大于地球公轉速度 V_0. 由于 $V_{火箭}$ 与 V_0 的方向一致，故火箭在 E 处相对于地球速度 $v'_{火箭}=V_{火箭}-V_0$。与上节求第三宇宙速度情况一样，由于在 E 处为地球引力作用范圍的边界，故速度 $v'_{火箭}$ 相应的地面发射速度 $v_{火箭}$ 应为

$$v_{火箭}^2=v_p^2+v'^2_{火箭}, \tag{2}$$

由此就可求出向火星发射宇宙火箭的地面最小速度 $v_{火箭}$.

同样，如果向木星发射火箭，也采用霍赫曼軌道，只須將(1)式改为

$$V_{木}^2=GS\left(2-\frac{1}{a_{木}}\right), \tag{1'}$$

其中 $a_{木}=\frac{(1+r_{木})}{2}$，$r_{木}$ 为木星軌道半徑。相应地可求出

$$v'_{木}=V_{木}-V_0,$$

$$v_{木}^2=v_p^2+v'^2_{木}. \tag{2'}$$

对土星、天王星等外行星都是一样的。

如对内行星，情况也相似。如采用霍赫曼軌道，此时半長徑 a 小于一个天文单位，故相应的 $V_{金}$，$V_{水}$ 都小于 V_0，故 $v'_{金}$，$v'_{水}$ 为負。但結果应該是相同的，只是火箭在 E 处相对于地球的速度 $v'_{金}$，$v'_{水}$ 与地球公轉方向相反而已，也就是在地面发射时，要向反方向发射。結果仍为

$$v'_{金}=V_{金}-V_0, \quad v'_{水}=V_{水}-V_0,$$

$$v_{金}^2=v_p^2+v'^2_{金}, \quad v_{水}^2=v_p^2+v'^2_{水}.$$

利用霍赫曼軌道的最大好处是需要的速度为最小，但最大缺点是所需时間为最長。火箭运行时間正好是霍赫曼軌道的半个周期。例如到达火星要 260 天，到木星要 2 年 267 天。而且由于在

軌道上的弧很长，誤差也很大，故在实用上都不采用。在实际发射时，速度 v 都会比最小速度大些，v' 也相应增大，如仍使 v' 与 V_0 方向一致，即 $V=V_0+v'$，所得的軌道仍与地球軌道相切，但半长徑增大，与外行星軌道交点更近，所需时間更短。

习 題

1. 在椭圓的运动中，如以真近点角 $f=\theta-\omega$ 为自变量，試求在行星公轉一周內，向徑 r 的平均值。（提示：用 r 和 f 的关系式，对 f 进行积分。）

2. 同上題一样，但用时間 t 作自变量，求向徑 r 在一周內的平均值。

3. 試証：行星在公轉一周內所受到的太阳輻射热的平均值与 $a^2\sqrt{1-e^2}$ 成反比。（輻射热与距离平方成反比）

4. 若一质点从一定点向任意方向发射出去，軌道为椭圓，如果速率为固定数值，試求下列結果：(1) 椭圓軌道的近日点軌迹的方程怎样？（提示：先討論平面問題，以发射方向角为参量，求出近日点坐标，再消去参量即得近日点曲綫方程。然后再推广到空間問題。）(2) 求远日点的軌迹方程；(3) 求椭圓中心的軌迹方程；(4) 求短徑端点的軌迹方程。

5. 設有一軌道为拋物綫的彗星，在运动过程中碰到一个同质量的靜止天体；碰撞后联合在一起，試求此联合天体的軌道。

6. 試找出双曲綫运动中輔助量 F 的几何意义。（参照椭圓运动中的 E）

7. 詳細推出(2-6-12)式，并指出其中 $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$ 的几何意义。

8. 說明(2-7-4)，(2-7-5)，(2-7-6) 式中的量 S, w, f 之間的象限关系。

9. 試用拉格朗日級数展开 f 为 M 的級数，只展到 e^3。（提示：利用关系 $r^2\dot{f}=\sqrt{\mu p}$。）

10. 用严格数学方法証明：$|\sin(M+\rho e^{\sqrt{-1}\varphi})|$ 对 M, φ 的极大值为 $\cosh\rho$。

11. 利用白塞耳函数的性质証明下列关系：

(1) $\dfrac{d}{dx}[x^p J_p(x)]=x^p J_{p-1}(x)$；　(2) $\dfrac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)]=-x^{-p}J_{p+1}(x)$。

12. 利用 § 17 中的关系証明下列等式成立：

(1) $\cos kE=k\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{n}J_{n-k}(ne)\cos nM\quad(n\neq 0,\ k\neq 1)$；

(2) $\cos E=\frac{e}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n}J_{n-1}(ne)\cos nM \quad (n\neq 0)$;

(3) $\sin kE = k\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n}J_{n-k}(ne)\sin nM \quad (n\neq 0)$.

13. 試証：用白塞耳函数展开的 E 为 M 的級数，与用拉格朗日級数展开的結果相同。这里可只准到 e^3 项。

14. 用白塞耳函数展开 r^2 为 M 的級数。

15. 用白塞耳函数展开 f 为 M 的三角級数，并与用拉格朗日級数展开的結果比較。(这里也只准到 e^3)

16. 根据 § 8 中定义的 P_x, P_y, P_z, θ_x, θ_y, θ_z 的几何意义，試直接用球面三角公式求出 (2-8-17) 式。

17. 若水星、金星、火星、木星、土星、天王星及海王星的公轉軌道都是圓形，而且都在黃道面上，如用霍赫曼軌道向它們发射宇宙火箭，試求出发射到每个天体的地面发射速度及到达每个天体的时間。(它們的軌道半徑依次为下面数值：0.387；0.723；1.524；5.203；9.539；19.191；30.071。都是用天文单位为长度单位。)

18. 試求出月球相对于地球的引力作用范圍的大小，并計算在作用范圍边界上的火箭相对于月球的拋物綫速度的数值。

19. 利用二体問題中的各种近点角关系証明下列等式成立：

(1) $\sqrt{r}\cos\frac{1}{2}f=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{1}{2}E$;

(2) $\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}f=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{1}{2}E$;

(3) $\frac{df}{dE}=\frac{\sqrt{1+e}(1+\cos f)}{\sqrt{1-e}(1+\cos E)}=\frac{\sin f}{\sin E}$.

第三章　軌道計算

在第二章中，我們已知道怎样从二体問題的运动方程进行积分，最后得到天体的視位置，但首先要知道軌道根数，也就是积分常数。所以要彻底解决二体問題，就必須知道軌道根数的計算方法，这正是本章所要讲的内容。

§1　历史概况

軌道計算問題，最初是从研究彗星运动产生的。在古代，一般人把彗星当作神秘的东西，或者认为它是地球大气中的物体，不叫它做天体。例如亚里斯多德和托勒玫，就不把彗星的研究放在天文学的范圍內。一直到文艺复兴时期，罗馬的天文学家雷希奥蒙頓（Rehiomontan）才正式认为彗星是天体，他粗略地测量了彗星的視差，断定彗星比月亮还要远。

第一次軌道計算是第谷作的。因为在当时观測工作已有一定的发展，他利用自己的观測数据，計算了1577年出現的彗星軌道。最初他认为彗星繞地球运动，故計算彗星的地心軌道，結果不成功，又改算日心軌道。大概他受托勒玫的影响很深，还采用"本輪"概念，結果还是不成功。这同当时的科学水平有关，当时认为天体只有直綫运动和圓形运动。第谷計算軌道虽然沒有成功，但是他产生了一种想法：认为彗星軌道不是圓形，而是一种卵形。这在当时还不能証实。以后克普勒研究了彗星运动，认为軌道是直綫。到十七世紀末期，吉尔菲耳（Diorfel）研究了1680年的彗星，提出彗星軌道是抛物綫，但也仅是一种假說。

直到牛頓的《自然哲学的数学原理》一书出版后，才正式提出了軌道計算方法。牛頓用图解法計算軌道根数，他把三次观測的方向投影到黄道面上，先假定彗星在这些方向上的任意位置，再把三个向徑在黄道面上的投影联接起来。其中假定了第一、二次观測和第二、三次观測之間的弦与所經过的时間成正比，由此近似地定出第二个观測的位置。再由力学条件和抛物綫軌道性质定出第二个观測位置的变化速度，由此即可求出彗星的軌道根数。他用1680年的彗星作为例子，但作得很粗略。以后克雷洛夫(Крылов)把这个方法公式化，但还不能达到要求。哈雷(Halley)分析了由1337年到1698年出現的24个彗星，用牛頓方法簡单地算了軌道根数后，发現在1531年、1607年和1682年出現的彗星应該是同一个，因此他断言在1758年底应該重新出現。后来由克雷諾簡单地計算了木星和土星对彗星的攝动，这顆彗星果然在哈雷所預言的时刻出現了。这第一次发現的周期彗星，就以哈雷的名字命名。

計算軌道的分析方法首先是由欧拉在1744年提出的。他采用四次观測来作，結果沒有成功，但是发現了抛物綫运动中著名的欧拉方程[参看(2-4-15)式]，为以后的工作打下了基础。軌道計算中的逐步近似法第一次由朗貝尔(Lambert)提出。他还把抛物綫运动中的欧拉方程推广到椭圓和双曲綫运动中去，并且还发現了天体在天球上的視运动曲率的定理——即朗貝尔定理。但是他沒有提出一套完整的方法。

拉格朗日在1778～1783年发表的著作中，对任意偏心率的軌道进行了研究。虽然所得結果沒有实际意义，但对理論天文学以后的发展有重大作用。他从三个观測位置和太阳在同一平面上的条件出发，解出了所得到的方程，得出了两个向徑和弦組成的三角形面积对时間的展开式，并且获得了决定第二观測时刻向徑的八次方程——即拉格朗日方程。

第一个完整的軌道計算的分析方法是由拉普拉斯在1780年提出的，他从一种完全不同的立足点出发，用一个观測和它們的第一、二次导数来定出圓錐曲綫的軌道。从分析观点来看，这是一种最好的方法，但在实用上却很不方便，因为要求出赤經赤緯的导数是非常困难的。經过很多人的研究，特别是洛依施勒尔（Leuschner）的工作，把拉普拉斯方法改善得能符合实际观测的要求，但是要把第一次所得軌道根数作复杂的改进才行。因此，很少用拉普拉斯方法来解决实际問題。

直到1797年，奥耳白尔（Olbers）在朗貝尔和拉格朗日的工作基础上，提出了一种完整的抛物綫軌道計算方法。这个方法到現在为止，基本內容并沒有改变，因此还叫做奥耳白尔方法。他是根据牛頓方法的概念，得到了彗星在第一、三次观測时刻的地心距离之間的一个关系——即奥耳白尔方程，再同欧拉方程一起就可以求出彗星的地心距离，因此軌道根数也就不难算出了。

在19世紀初，小行星发現以后，要求很快地算出軌道根数，以便編制星历表指导观測。1801年，皮阿齐（Piazzi）发現第一号小行星后，高斯就算出了它的椭圓軌道，使人們能够重新找到它。高斯所計算的軌道，經过了一次修改，在1809年正式发表。他是把拉格朗日的概念加以补充和发展，使得能够符合实用要求。他証明，求两个未知量的値要比求一个未知量方便。他把拉格朗日的八次方程改成三角形式，并得到决定行星向徑組成的三角形和扇形面积之比的方法。高斯不仅在理論上討論軌道計算方法，而且把軌道計算变成了实际应用的工具。这样一来，軌道計算問題就得到了基本解决。

軌道計算到現在还在不断发展，出現了很多計算軌道的新方法，但是基本原理仍然沒有改变。有些地方虽然是作了改进，特別是吉伯斯（Gibbs）和奥波耳例尔（Oppolzer）的工作。但这些新的

方法在实用上都沒有比奧耳白尔方法和高斯方法好。高斯方法中的例外情形（如三个观測在天球的一个大圓上），需用四个观測来作，这是由鮑辛格尔(Bauschinqer)完成的。拋物綫軌道計算中的多重解問題也經过很多人的研究。

苏保金詳細研究了欧拉-朗贝尔方程，认为可以提出一种原則上和高斯不同的方法，但是到現在还沒有人提出来。

§2 用三个观測計算橢圓軌道方法的輪廓

軌道根数一共有6个，因此必須有6个已知量来定出它們。由于天文观測不能得到天体的空間坐标，而只能得到天体的方向，即(α, δ)两个量，因此要确定天体的軌道，需要有三次观測。高斯計算橢圓軌道的基本出发点就在这里。

設在三个时刻t_1，t_2，t_3得到天体的三組观測值(α_1, δ_1)，(α_2, δ_2)，(α_3, δ_3)，由(2-8-22)式有

$$\left.\begin{aligned} \rho_i \cos\alpha_i \cos\delta_i &= x_i + X_i, \\ \rho_i \sin\alpha_i \cos\delta_i &= y_i + Y_i, \\ \rho_i \sin\delta_i &= z_i + Z_i. \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, 3). \tag{1}$$

其中ρ_i为天体到地球的距离，(x_i, y_i, z_i)为天体的日心赤道直角坐标，(X_i, Y_i, Z_i)为t_i时刻的太阳的地心赤道直角坐标，可以从天文年历上查出。上述各量应該对应于同一坐标原点。

(1)式共有9个方程，其中ρ_i，x_i，y_i，z_i是未知量，共有12个。但x_i，y_i，z_i是由6个軌道根数Ω，ω，i，a，e，M所决定，故实际上为9个未知量。在(1)的9个方程中消去ρ_i后而得到6个方程，包含6个未知量（即軌道根数），因此在理論上是可以解的。但是因为它們之間的函数关系非常复杂，实际上还沒有人把它解出来，目前还只能用近似解法。下面要讲的高斯方法就是一种較好的近似解法。

我們从观测只能得到天体的三个方向，而决定以太阳为焦点的圓錐曲綫，还需要知道天体的三个位置。知道天体的三个空間位置，关鍵在于知道天体的軌道面在空間的位置。所以高斯方法从天体的軌道平面方程着手，这是很自然的。

高斯最初提出这个方法时，因当时計算技术不高，用的是对数計算形式，因而采用黃道坐标系較为方便。如用計算机进行計算，则用赤道坐标系更方便一些，这一工作由梅尔頓(Merton)等人完成。下面讲的就是后一种形式，因此有的书上叫做梅尔頓方法，但实际上就是高斯方法。

§3 观测值中系統誤差的改正

由天文观测所得到的 α、δ 是天体的視位置，为了要进行軌道計算，必需使它們相对同一坐标系，所以必需进行光行差、視差归算到年初平位置等一系列的改正。

一、平位置的改算

如果所給的值是視位置，则先要把它改为年初的平位置，改算方法是用白塞尔星数或独立星数。这个内容大家在球面天文学中已經学过了（見《天文学教程》第15章§6），现在只把結果写在下面。以 α_0, δ_0 表示平位置，α, δ 表示視位置。如用白塞尔星数，则

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0&=\alpha-(Aa+Bb+Cc+Dd+E),\\ \delta_0&=\delta-(Aa'+Bb'+Cc'+Dd').\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

如用独立星数，则为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0&=\alpha-\Big[f-\frac{1}{15}\,g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta\\ &\qquad\qquad+\frac{1}{15}\,h\sin(H+\alpha)\sec\delta\Big],\\ \delta_0&=\delta-[g\cos(G+\alpha)+h\cos(H+\alpha)\sin\delta+i\cos\delta].\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $A, B, C, D, E, f, g, h, i, G, H$ 的值都在天文年历中載出。$a, b, c, d, a', b', c', d'$ 为恒星常数，仅与恒星的坐标有关，在我国天文年历中載有 a, b, a', b' 的值，c, d, c', d' 容易从定义算出，或查专門計算用表。

如果观測值的春分点和黄道历元不同(用不同年初平春分点)，則要作岁差修正。如在历元 t_0 时的坐标为 (α_0, δ_0)，在历元 t 时为 (α, δ)，設 m, n 为赤經岁差常数，則有

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+(m+n\sin\alpha_1\operatorname{tg}\delta_1)(t-t_0),\\ \delta&=\delta_0+n\cos\alpha_1(t-t_0).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

如果相差年数較多，可化为同一标准春分点 (1900.0, 1925.0, 1950.0, …)，这就要用到岁差表。

二、視差改正

如果采用地心作为原点，需要把观測位置改为地心位置。

設 α', δ' 为地面位置，α, δ 为地心位置，則

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha'+p_\alpha=\alpha'+\frac{1}{15}\,\frac{\rho_0 p_\odot}{\rho}\cos\varphi'\sin(s-\alpha)\sec\delta,\\ \delta&=\delta'+p_\delta=\delta'+\frac{\rho_0 p_\odot}{\rho}[\sin\varphi'\cos\delta-\cos\varphi'\sin\delta\cos(s-\alpha)].\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

其中 ρ 为天体到地球的距离，以天文单位为单位。ρ_0 为观測地点的地心距，以地球赤道半徑为单位。$p_\odot$ 为太阳視差，φ' 为观測地点的地心緯度，s 为观測时刻的恒星时。有些天文台发表观測时，同时給出視差因子 $\ln\rho p_\alpha$, $\ln\rho p_\delta$，这就可用 ρ 的近似值来求出赤經和赤緯的視差改正 p_α, p_δ，如果沒有，則根据(4)式自己計算。

如果用观測地点作标准，則要改正 X, Y, Z。用球面关系很容易得到它們的改正量为

$$\left.\begin{aligned}\Delta X&=-\rho_0 p_\odot\sin1''\cos\varphi'\cos s,\\ \Delta Y&=-\rho_0 p_\odot\sin1''\cos\varphi'\sin s,\\ \Delta Z&=-\rho_0 p_\odot\sin1''\sin\varphi'.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

三、行星光行差

因天体的光綫射到地球上要經过一段时間，故在地上某时刻 t 看的天体，应該是早一些时候的位置，这个差就是光綫由天体到地球所需的时間。光綫走一个天文单位所需时間为

$$498^s.72 = 0^d.005772.$$

如果天体到地球的距离为 ρ，则实际时間应为

$$t^0 = t - 0^d.005772 \times \rho. \tag{6}$$

§4 基 本 方 程

取日心赤道坐标系統为标准，由于二体問題的軌道在通过太阳中心的平面上，故軌道平面方程为

$$Ax + By + Cz = 0. \tag{1}$$

天体在三个时刻的坐标 (x_i, y_i, z_i) $(i=1, 2, 3)$ 应該满足这个方程，故有

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由于平面是存在的，故 A, B, C 不可能都等于零，因此，系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

把(3)式按不同的列展开，可得

$$\left.\begin{aligned} x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_1z_3 - z_1y_3) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2) = 0, \\ y_1(x_2z_3 - z_2x_3) - y_2(x_1z_3 - z_1x_3) + y_3(x_1z_2 - z_1x_2) = 0, \\ z_1(x_2y_3 - y_2x_3) - z_2(x_1y_3 - y_1x_3) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

这三个方程相互之間只是文字順序不同。括弧中的量可用三角形

面积的投影来表示，即

$$y_2z_3-z_2y_3=[r_2,\ r_3]\cos(n,\ x),$$

其中$(n,\ x)$为軌道面法綫同x軸之間的交角，$[r_2,\ r_3]$表示向徑r_2，r_3組成的三角形面积。

同样 $$y_1z_3-z_1y_3=[r_1,\ r_3]\cos(n,\ x),$$

$$y_1z_2-z_1y_2=[r_1,\ r_2]\cos(n,\ x),$$

等等，代入(4)式后，消去軌道面法綫的方向余弦后得

$$\left.\begin{aligned}&[r_2,\ r_3]x_1-[r_1,\ r_3]x_2+[r_1,\ r_2]x_3=0,\\&[r_2,\ r_3]y_1-[r_1,\ r_3]y_2+[r_1,\ r_2]y_3=0,\\&[r_2,\ r_3]z_1-[r_1,\ r_3]z_2+[r_1,\ r_2]z_3=0.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

在(5)中各項除以$[r_1,\ r_3]$，并令

$$n_1=\frac{[r_2,\ r_3]}{[r_1,\ r_3]},\qquad n_3=\frac{[r_1,\ r_2]}{[r_1,\ r_3]},\tag{6}$$

則得

$$\left.\begin{aligned}&n_1x_1-x_2+n_3x_3=0,\\&n_1y_1-y_2+n_3y_3=0,\\&n_1z_1-z_2+n_3z_3=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

(7)式中，n_1，n_3可以用另外方法求出解法(見下面)，故(7)式为x_i，y_i，z_i之間的独立方程。

在(3-2-1)式中，令

$$\left.\begin{aligned}&a_i=\cos\delta_i\cos\alpha_i,\\&b_i=\cos\delta_i\sin\alpha_i,\\&c_i=\sin\delta_i,\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

則x_i，y_i，z_i可表为

$$\left.\begin{aligned}&x_i=a_i\rho_i-X_i,\\&y_i=b_i\rho_i-Y_i,\\&z_i=c_i\rho_i-Z_i.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

代入(7)式后整理得

$$\left.\begin{aligned} a_1n_1\rho_1-a_2\rho_2+a_3n_3\rho_3&=n_1X_1-X_2+n_3X_3,\\ b_1n_1\rho_1-b_2\rho_2+b_3n_3\rho_3&=n_1Y_1-Y_2+n_3Y_3,\\ c_1n_1\rho_1-c_2\rho_2+c_3n_3\rho_3&=n_1Z_1-Z_2+n_3Z_3. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(10)式中的未知量为 n_1、n_3，ρ_i，共有5个。如果按 ρ_i 解出，可表为 n_1，n_3 的函数。现在采用逐步近似法来解。先取 n_1，n_3 的近似値，可算出 ρ_i，然后利用它們改进 n_1，n_3；再用改进后的 n_1，n_3 来改进 ρ_i。如此继續下去，直到得出准确的 ρ_1，ρ_2，ρ_3 为止，则軌道根数就很容易求出。所以下面的問題就是如何求出 n_1，n_3。

在(10)式中消去 $n_1\rho_1$，$n_3\rho_3$ 得

$$-D\rho_2=d, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{其中}\quad d&=\begin{vmatrix} a_1 & n_1X_1-X_2+n_3X_3 & a_3\\ b_1 & n_1Y_1-Y_2+n_3Y_3 & b_3\\ c_1 & n_1Z_1-Z_2+n_3Z_3 & c_3 \end{vmatrix}\\ &=n_1\begin{vmatrix} a_1 & X_1 & a_3\\ b_1 & Y_1 & b_3\\ c_1 & Z_1 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & X_2 & a_3\\ b_1 & Y_2 & b_3\\ c_1 & Z_2 & c_3 \end{vmatrix}+n_3\begin{vmatrix} a_1 & X_3 & a_3\\ b_1 & Y_3 & b_3\\ c_1 & Z_3 & c_3 \end{vmatrix}\\ &=n_1d_1-d_2+n_3d_3,\\ \text{及}\quad D&=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},\quad d_i=\begin{vmatrix} a_1 & X_i & a_3\\ b_1 & Y_i & b_3\\ c_1 & Z_i & c_3 \end{vmatrix}\quad (i=1,2,3). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

D，d_1，d_2，d_3 都是已知量。D 是以坐标原点和天体在天球上的三个地心位置为頂点所組成的四面体体积的6倍，长度单位为天球半徑。在实际計算中不用行列式，而直接消去 $n_1\rho_1$，$n_3\rho_3$。下面就来具体地得出計算 n_1，n_3 的公式。

为簡单起見，設 x-y 平面与軌道平面重合，且設行星质量可以忽略不計，則运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2\frac{x}{r^3},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-k^2\frac{y}{r^3}. \tag{13}$$

为方便起見，令

$$\tau = kt, \tag{14}$$

则时間单位为 $\frac{1}{k}=58^{d}.134087$（見第一章§1）。(13)式成为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\frac{x}{r^3},\qquad \frac{d^2y}{d\tau^2}=-\frac{y}{r^3}. \tag{15}$$

設在 $\tau=0$ 时，天体坐标及向徑分別为 (x, y) 及 r；在时刻 τ 时为 (x', y') 及 r'。 如果 τ 不太大，则可用泰勒級数展开，

$$\left.\begin{aligned}
x' &= x+\frac{dx}{d\tau}\tau+\frac{1}{2!}\frac{d^2x}{d\tau^2}\tau^2+\frac{1}{3!}\frac{d^3x}{d\tau^3}\tau^3+\cdots,\\
y' &= y+\frac{dy}{d\tau}\tau+\frac{1}{2!}\frac{d^2y}{d\tau^2}\tau^2+\frac{1}{3!}\frac{d^3y}{d\tau^3}\tau^3+\cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

以(15)式对 τ 求微商，可得 x, y 的高阶导数。其中除 r 外只包含 x 和 $\frac{dx}{d\tau}$ $\left(\text{或 } y \text{ 和} \frac{dy}{d\tau}\right)$。因为 x（或 y）的高阶导数可再由(15)式消去，即

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^3x}{d\tau^3}=\frac{3x}{r^4}\frac{dr}{d\tau}-\frac{1}{r^3}\frac{dx}{d\tau},\\
&\frac{d^4x}{d\tau^4}=x\left[\frac{1}{r^6}-\frac{12}{r^5}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{3}{r^4}\frac{d^2r}{d\tau^2}\right]+\frac{6}{r^4}\frac{dr}{d\tau}\frac{dx}{d\tau},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

把这些式子代入(16)式得

$$\left.\begin{aligned}
x' &= Fx+G\frac{dx}{d\tau},\\
y' &= Fy+G\frac{dy}{d\tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
F &= 1-\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{r^3}+\frac{1}{2}\frac{\tau^3}{r^4}\frac{dr}{d\tau}+\frac{1}{24}\left[\frac{1}{r^6}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{12}{r^5}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{3}{r^4}\frac{d^2r}{d\tau^2}\right]\tau^4+\cdots,\\
G &= \tau-\frac{1}{6}\frac{\tau^3}{r^3}+\frac{1}{4}\frac{\tau^4}{r^4}\frac{dr}{d\tau}+\cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

因此，由(18)式得

$$[r,\ r'] = xy' - yx' = G\left(x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau}\right). \tag{20}$$

右端括号里的量等于面积速度的两倍，即 $h = k\sqrt{p}$. 但在这里的单位 $k=1$，故

$$[r,\ r'] = G\sqrt{p}. \tag{21}$$

这就是所要的結果，現在把它应用到天体的三个位置上去，坐标和向徑分别表为 $(x_i,\ y_i)$ 和 r_i $(i=1,\ 2,\ 3)$. 根据上面定义的时間单位，令

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2),\quad \tau_2 = k(t_3 - t_1),\quad \tau_3 = k(t_2 - t_1). \tag{22}$$

在(18)式中令 $x = x_2$, x' 分别为 x_1 及 x_3 (y 也相同)，則得

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= F_1x_2 + G_1\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_2, & x_3 &= F_3x_2 + G_3\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_2; \\ y_1 &= F_1y_2 + G_1\left(\frac{dy}{d\tau}\right)_2, & y_3 &= F_3y_2 + G_3\left(\frac{dy}{d\tau}\right)_2. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

由此得[利用(21)式]

$$\left.\begin{aligned} [r_1,\ r_2] &= x_1y_2 - y_1x_2 = -G_1\sqrt{p}, \\ [r_2,\ r_3] &= x_2y_3 - y_2x_3 = +G_3\sqrt{p}, \\ [r_1,\ r_3] &= x_1y_3 - y_1x_3 = (F_1G_3 - G_1F_3)\sqrt{p}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -\tau_3 + \frac{1}{6}\frac{\tau_3^3}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_3^4}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 + \cdots, \\ G_3 &= \tau_1 - \frac{1}{6}\frac{\tau_1^3}{r_2^3} + \frac{1}{4}\frac{\tau_1^4}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 + \cdots; \\ F_1 &= 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^3}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 + \cdots, \\ F_3 &= 1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{2}\frac{\tau_1^3}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

所以，三角形面积的两倍成为

$$
\left.\begin{aligned}
[r_1,\ r_2] &= \tau_3\sqrt{p}\left[1-\frac{1}{6}\,\frac{\tau_3^2}{r_2^3}-\frac{1}{4}\,\frac{\tau_3^3}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2+\cdots\right],\\
[r_2,\ r_3] &= \tau_1\sqrt{p}\left[1-\frac{1}{6}\,\frac{\tau_1^2}{r_2^3}+\frac{1}{4}\,\frac{\tau_1^3}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2+\cdots\right],\\
[r_1,\ r_3] &= \tau_2\sqrt{p}\left[1-\frac{1}{6}\,\frac{\tau_2^2}{r_2^3}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{4}\,\frac{\tau_2^2(\tau_1-\tau_3)}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2+\cdots\right].
\end{aligned}\right\}\quad(26)
$$

在最后一式中利用了关系 $\tau_2=\tau_1+\tau_3$。由此可得三角形面积之比，n_1，n_3 为

$$
\left.\begin{aligned}
n_1 &= \frac{[r_2,\ r_3]}{[r_1,\ r_3]}=\frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1+\frac{1}{6}\,\frac{\tau_3(\tau_1+\tau_2)}{r_2^3}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{4}\,\frac{\tau_3(\tau_3^2+\tau_1\tau_3-\tau_1^2)}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2+\cdots\right],\\
n_3 &= \frac{[r_1,\ r_2]}{[r_1,\ r_3]}=\frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1+\frac{1}{6}\,\frac{\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{r_2^3}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{4}\,\frac{\tau_1(\tau_1^2+\tau_1\tau_3-\tau_3^2)}{r_2^4}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2+\cdots\right].
\end{aligned}\right\}\quad(27)
$$

显然，这些結果对任意的圆錐曲綫軌道都是正确的。下面就根据这些公式，用逐步近似法来求 n_1，n_3，ρ_1，ρ_2，ρ_3 的第一次近似。

§5 第一次近似計算和改进

上述所得的 n_1，n_3 的式子是近似的，現在来討論哪些項必須保留。

用(3-4-26)式可求出以三个向徑端点組成的三角形的面积的两倍，即

$$
[r_1,\ r_2]+[r_2,\ r_3]-[r_1,\ r_3]=\sqrt{p}\,\frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{2r_2^3}(1+\cdots). \qquad (1)
$$

由(1)式可看出，如果在(3-4-27)式中省去了包含 r_2^{-3} 的項，

則上述的三角形面积为零. 这相当于直綫运动的情况, 故 $\frac{1}{r_2^3}$ 項必須保留。至于包含 $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2$ 的項, 在第一次近似討論中是不知道的, 只好略去了。这样就可以令

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{1}{6}\tau_1\tau_3 \frac{1+\frac{\tau_1}{\tau_2}}{r_2^3}, \qquad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{1}{6}\tau_1\tau_3 \frac{1+\frac{\tau_3}{\tau_2}}{r_2^3}. \tag{2}$$

这个公式是恩克 (Encke) 求得的, 比高斯原来的公式要准确些。再假定

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\tau_1}{\tau_2} = n_1^0, \quad \frac{\tau_3}{\tau_2} = n_3^0, \\ &\frac{1}{6}\tau_1\tau_3(1+n_1^0) = \nu_1, \\ &\frac{1}{6}\tau_1\tau_3(1+n_3^0) = \nu_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由此得

$$n_1 = n_1^0 + \frac{\nu_1}{r_2^3}, \qquad n_3 = n_3^0 + \frac{\nu_3}{r_2^3}. \tag{4}$$

代入(3–4–12)和(3–4–11)式得

$$-D\rho_2 = n_1^0 d_1 - d_2 + n_3^0 d_3 + \frac{d_1\nu_1 + d_3\nu_3}{r_2^3} \tag{5}$$

或

$$\rho_2 = k_0 - \frac{l_0}{r_2^3}, \tag{6}$$

其中

$$k_0 = \frac{d_1 n_1^0 - d_2 + d_3 n_3^0}{-D}, \qquad l_0 = \frac{d_1\nu_1 + d_3\nu_3}{D}. \tag{7}$$

这样就在 ρ_2 和 r_2 之間建立了函数关系 (k_0, l_0 都是已知量)。从(4)式可知, 要求出 n_1, n_3, 必須知道 r_2 的值, 而現在只有 r_2, ρ_2 的一个关系式[即(6)式], 若能再找到一个, 那就可解出 r_2, ρ_2, 并得出 n_1, n_3, 从而可求出 ρ_1、ρ_2, ρ_3 的第一次近似值。下面用簡单的几何方法找出 r_2, ρ_2 之間的另一关系式。

在图 17 中，S, T, P 分别为太阳、地球和所討論的天体。在这个三角形中，有关系

$$r_2^2 = R_2^2 + \rho_2^2 + 2 R_2 \rho_2 \cos\theta_2. \tag{8}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} R_2^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2, \\ R_2 \cos\theta_2 = -(a_2 X_2 + b_2 Y_2 + c_2 Z_2) \end{array}\right\} \tag{9}$$

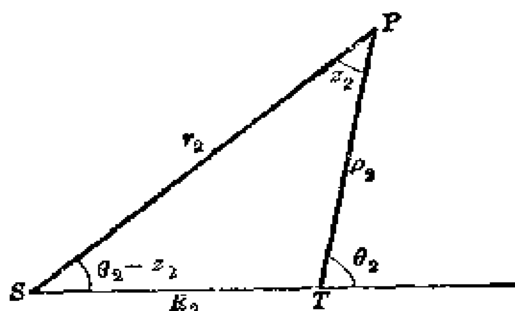


图 17

都是已知量。从(6)，(8)式可解出 ρ_2, r_2. 如果消去其中之一，就得到一个 8 次方程，这并不好解。若有由 r^2 求 $\frac{1}{r^3}$ 的表，则用逐步近似法来解要方便些。

高斯証明(6)，(8)两式可化为一超越方程，便于用对数計算。实际上，在三角形 SPT 中，令 $\angle SPT$ 为 z_2，则有

$$\frac{\rho_2}{\sin(\theta_2 - z_2)} = \frac{r_2}{\sin\theta_2} = \frac{R_2}{\sin z_2}.$$

在这里，只要知道了 z_2，则 ρ_2, r_2 都容易求出。把它代入(6)式卽得 z_2 的方程

$$\frac{R_2 \sin(\theta_2 - z_2)}{\sin z_2} = k_0 - \frac{l_0 \sin^3 z_2}{R_2^3 \sin^3\theta_2}.$$

根据前面討論，可求出 r_2, ρ_2 的第一次近似值。以 r_2 代入(4)式可求出 n_1, n_3；再把它們代入(3-4-10)式可求出 ρ_1, ρ_3；再代入(3-4-9)式求出 x_i, y_i, z_i；最后由

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \qquad r_3^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \tag{10}$$

或

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= R_1^2 + 2R_1\rho_1\cos\theta_1 + \rho_1^2, \\ r_3^2 &= R_3^2 + 2R_3\rho_3\cos\theta_3 + \rho_3^2; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中

$$R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2,$$

$$R_3^2 = X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2,$$

$$R_1\cos\theta_1 = -(a_1X_1 + b_1Y_1 + c_1Z_1),$$

$$R_3\cos\theta_3 = -(a_3X_3 + b_3Y_3 + c_3Z_3);$$

求出 r_1, r_3.

知道了 ρ_1, ρ_2, ρ_3，就可以用它們来修正行星光行差。根据§3，观测时刻应改为

$$t_1^0 = t_1 - A\rho_1, \quad t_2^0 = t_2 - A\rho_2, \quad t_3^0 = t_3 - A\rho_3, \tag{12}$$

并用它們来求第二次近似值。按照拉格朗日的想法，要計算 n_1, n_3 的展开式中的高次項，但这样求近似非常繁复。高斯避免这种做法，而引入一个新的量 $\bar{y}$ 来計算 n_1, n_3 的更准确值。

設 (r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_1, r_3) 表示以向徑和弧組成的扇形面积的两倍，$[r_1, r_2]$, $[r_2, r_3]$, $[r_1, r_3]$ 为相应的三角形面积的两倍，并令

$$\bar{y}_1 = \frac{(r_2, r_3)}{[r_2, r_3]}, \quad \bar{y}_2 = \frac{(r_1, r_3)}{[r_1, r_3]}, \quad \bar{y}_3 = \frac{(r_1, r_2)}{[r_1, r_2]}, \tag{13}$$

則

$$n_1 = \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]} = \frac{(r_2, r_3)\bar{y}_2}{(r_1, r_3)\bar{y}_1}, \quad n_3 = \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_3]} = \frac{(r_1, r_2)\bar{y}_2}{(r_1, r_3)\bar{y}_3}.$$

根据克普勒第二定律，$(r_1, r_2) = k\sqrt{p}\,(t_2 - t_1) = \sqrt{p}\,\tau_3$, …，故上式成为

$$n_1 = \frac{\tau_1\bar{y}_2}{\tau_2\bar{y}_1} = n_1^0\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}, \qquad n_3 = \frac{\tau_3\bar{y}_2}{\tau_2\bar{y}_3} = n_3^0\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}, \tag{14}$$

其中 τ_i 已經作了行星光行差的修正。只要求出了 $\bar{y}_i$ 就可以很簡单地求出 n_1, n_3. 在§7中我們将讲述高斯求 $\bar{y}_i$ 的方法。

§6　基本方程的分析，朗貝尔定理和拉格朗日方程

上面已讲过基本方程和怎样求 ρ_2, r_2 的近似值，这在一般情况下是可以的。我們很自然地会想到这样的两个問題：是否(3-5-6)，(3-5-8)这两式永远可以解？就算是可以解，但从这两式中消去一个变量，得到 8 次代数方程，应該有 8 个根。在这些根中哪些是符合于軌道計算所要求的？在我們进行 r_2, ρ_2 的近似計算之前必須先对上述的两个問題进行研究。下面先来討論第一个問題。

因(3-5-6)式本身就是(3-4-11)，(3-4-12)式的結果，所以我們就来討論这两个式子。从这两个式子中可以看到，当 $D=0$ 时为例外情形。从几何观点看来，这就是天体的三个位置同坐标原点在同一个平面上，即天体三个視位置在天球的一个大圓弧上的情形。在这种情况下，只有 $d=0$ 时，才可能有解。亦即三个行列式 d_1, d_2, d_3 中，至少有两个不等于零；或者三个同时为零。在第一种情形下，(3-5-5)式成为

$$d_1n_1^0-d_2+d_3n_3^0+\frac{d_1\nu_1+d_3\nu_3}{r_2^3}=0. \tag{1}$$

由此式可求出 r_2，然后再由(3-5-8)式求 ρ_2. 在这种情况下，系数都很小，故結果不好。如果其中有某一 d_i 为零，則太阳也有某一个位置在上述的平面上，即同天体的三个位置在天球的同一大圓上。特别是 $d_2=0$ 时，若 $\tau_1=\tau_3$，則 $n_1^0=n_3^0$, $\nu_1=\nu_3$，(1)式成为

$$(d_1+d_3)\left(n_1^0+\frac{\nu_1}{r_2^3}\right)=0. \tag{2}$$

因 n_1^0 和 ν_1 都是正值，故必有 $d_1+d_3=0$，因此(1)式成为 $0=0$，不能定出 r_2.

在第二种情形 ($d_1=d_2=d_3=0$)，即太阳的三个視位置和三个天体的視位置都在天球的同一大圓上（即黄道上）。此时 (1) 式又

成为 $0=0$，不能定出 r_2。

还有一种情况，就是三个观测中有两个(例如第一、第三两个观测)正好在天球直徑的两端，有 $a_1=-a_3$，$b_1=-b_3$，$c_1=-c_3$。$n_1\rho_1$ 和 $n_3\rho_3$ 的系数只是差一个符号，故不能从(3-4-10)式分别求出，只能求出 $n_1\rho_1-n_3\rho_3$。至于 ρ_2，可以从其中任意两式求出。

实际情况不容易严格符合上面的各种例外情形，但有时会与它們很接近。这样的計算軌道很沒有把握，就需要另外选擇观测。当三个观测都在黃道上时，天体軌道就同地球軌道相合，$i=0$，Ω 沒有意义，而此时天体黃緯为 0。故要定出其余四个軌道根数，需要四个观测的黃經。因此，当天体的視軌道同黃道相差很小时，都要用四个观测来計算軌道。

根据上面的結果，現在来証明一个定理，即朗貝尔定理。

如果观测者(在地球上)在空間的运动符合克普勒三定律，则 $\rho_2=0$ 也应該满足(3-5-6)，(3-5-8)两式。事实上，这些条件都不能严格满足，但相差亦不多。因为(3-5-6)式表示的只是当天体的三个观测方向不变时，r_2 和 ρ_2 之間的关系，所以 ρ_2 沿着第二个观测方向趋于 0 时，(3-5-6)式仍然成立。此时 $r_2=R_2$，于是(3-5-6)式成为

$$k_0=\frac{l_0}{R_2^3}. \tag{3}$$

这个式子可以作为 k_0 和 l_0 的近似驗算公式，把它代入(3-5-6)式得

$$\rho_2=l_0\left(\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{r_2^3}\right). \tag{4}$$

(4)式包含着朗貝尔定理：如果天体在观测时比地球离太阳远，则天体在天球上的視軌道凸向太阳；反之，则凹向太阳。实际上，因 $\rho_2>0$，故在(4)式中，如 $r_2>R_2$，则 $l_0>0$；如 $r_2<R_2$，则 $l_0<0$。下面就来証明。

由 l_0 的定义得

$$l_0=\frac{d_1\nu_1+d_3\nu_3}{D}=\begin{vmatrix}a_1 & \nu_1X_1+\nu_3X_3 & a_3\\ b_1 & \nu_1Y_1+\nu_3Y_3 & b_3\\ c_1 & \nu_1Z_1+\nu_3Z_3 & c_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{5}$$

預先假定，t_1，t_2，t_3 相差不多。在图 18 中，S_1，S_2，S_3 为太阳的視位置；P_1，P_2，P_3 为天体視位置。可以找到一个在 S_2 附近的位置 S_0，使得

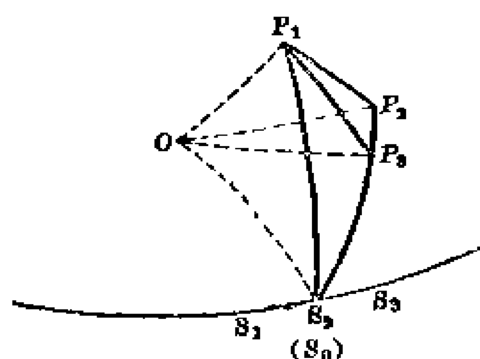


图 18

$$\left.\begin{aligned}\nu_1X_1+\nu_3X_3&=(\nu_1+\nu_3)X_0,\\ \nu_1Y_1+\nu_3Y_3&=(\nu_1+\nu_3)Y_0,\\ \nu_1Z_1+\nu_3Z_3&=(\nu_1+\nu_3)Z_0,\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$$X_0^2+Y_0^2+Z_0^2=R_0^2, \tag{7}$$

故有

$$l_0=(\nu_1+\nu_3)R_0\begin{vmatrix}a_1 & X_0:R_0 & a_3\\ b_1 & Y_0:R_0 & b_3\\ c_1 & Z_0:R_0 & c_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{8}$$

(8)式中分子上的行列式为四面体 $OP_1P_3S_0$ 体积的 6 倍，分母行列式为四面体 $OP_1P_2P_3$ 体积的 6 倍。如两个行列式的符号相同，在上述的字母顺序下，P_2 必在三角形 $P_1S_0P_3$ 里面，即 $P_1P_2P_3$ 的曲綫凸向太阳，此时由(8)式显然有 $l_0>0$（因 ν_1，ν_3，R_0 均为正），由(4)式即知 $r_2>R_2$；反之，如两行列式符号相反，則正是图 18 所画的情形，$P_1P_2P_3$ 凹向太阳，此时 $l_0<0$，$r_2<R_2$，故朗貝尔定理是正确的。

从这里可看出，如果 $r_2=R_2$ 时，則 P_2 在 $\widehat{P_1P_3}$ 大圆上，即 $D=0$。因此由朗貝尔定理又得到一种例外情形，而此时天体并不在黃道上。

現在我們来研究第二个問題。把 (4) 式同 (3-5-8) 式联合起

来，得

$$\left.\begin{aligned}\rho_2&=l_0\left(\frac{1}{R_2^3}-\frac{1}{r_2^3}\right),\\ r_2^2&=R_2^2+2R_2\cos\theta_2\rho_2+\rho_2^2.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

在其中令

$$x=\frac{r_2}{R_2},\qquad y=\frac{\rho_2}{R_2},\qquad l=\frac{l_0}{R_2^4},\qquad \cos\theta_2=c,\tag{10}$$

則(9)式变为

$$y=l\left(1-\frac{1}{x^3}\right),\tag{11}$$

$$x^2=1+2cy+y^2.\tag{12}$$

由(10)式知 $\qquad x>0,\quad y>0,\quad -1\leqslant c\leqslant 1.$

在(11)，(12)式中消去 y 得

$$f(x)=x^8-(1+2cl+l^2)x^6+2l(c+l)x^3-l^2=0.\tag{13}$$

这就是拉格朗日方程。$x=1$ 是它的解，但这正是表示地球的运动。把这个根消去后，方程就是 7 次，用它可求 x，从而求出 r_2。下面来討論这个方程。

因 $\qquad 1+2cl+l^2=(1-c^2)+(c+l)^2>0,$

故第二个系数为負。現在証明第三个系数为正。

1. 若 $l>0$，根据 (11) 式有 $1-\frac{1}{x^3}>0$，即 $x>1, y<l$. 如果 $c>0$，則显然 $l(c+l)>0$；如果 $c<0$，令 $c=-c'$，則 $x^2=1-2c'y+y^2$. 由 $x>1$ 得 $y^2>2c'y$ 或 $y>2c'$，而 $y<l$，故 $l>2c'>c'$，故 $l+c=l-c'>0$，即 $l(l+c)>0$.

2. 若 $l<0$，則按(11)式 $1-\frac{1}{x^3}<0$，即 $x<1$. 由 (12) 式得 $y^2+2cy<0$，故必 $c<0$，因此 $l(l+c)>0$.

根据上面的討論，(13)式的系数共有三个变号，故应有一个或三个正根。而 $x=1$ 已經是一个正根(代表地球运动)，故代表所討

論天体运动的根还可能有两个，但这并不是説这两个都是眞正的解。

由于 $\rho_2>0$，故 $y>0$。如果两个根都可用的話，则它們都是大于1或都是小于1。因若是一个大于1，一个小于1，则由(11)式知，总有一个使 $y<0$ 而不能用。下面就来討論两个都可用的条件。

因 $f(x)$ 已有 $x=1$ 这个根，故可令

$$f(x)=(x-1)g(x), \tag{14}$$

其中 $g(x)$ 应有两个正根。由(13)、(14)式可知

$$g(0)=-f(0)=l_2>0.$$

現在来找出 $g(1)$。以(14)式对 x 求微商得

$$\frac{df(x)}{dx}=g(x)+(x-1)\frac{dg(x)}{dx},$$

由此得

$$g(1)=\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1}.$$

以(13)式代入得

$$g(1)=2(1-3cl). \tag{15}$$

如果 $g(1)>0$，则在0与1之間能有两个根或一个也沒有，这时就有两个解；如果 $g(1)<0$，则在0与1之間只有一个根，还有两个是大于1，其中只有一个能用。故由(15)式知，有两个可用根的条件为

$$1-3cl>0,$$

即

$$3\cos\theta_2 l_0<R_2^4. \tag{16}$$

这就是軌道計算中有两个解的判别式，由奧波耳柳尔第一次提出。在这种情况下，可以得到两組軌道根数，应該用另外的观测来驗証，看哪一組是眞的。

§7　求扇形面积和三角形面积之比

高斯証明用天体的两个日心位置可以求出由它們組成的扇形

和三角形面积之比。若已知它們的向徑 r, r'，向徑間的交角 $f'-f$ 和时間間隔 $t'-t$，令

$$f'-f=2v. \tag{1}$$

根据定义得

$$\bar{y}=\frac{(r,\ r')}{[r,\ r']}=\frac{k\sqrt{p}\,(t'-t)}{rr'\sin(f'-f)}=\frac{\tau\sqrt{p}}{rr'\sin 2v}, \tag{2}$$

其中 $\tau=k(t'-t)$.

下面的推导結果对双曲綫軌道也能适用，只是把椭圓軌道的偏近点角变成虚数就行了。

要求出 $\bar{y}$，必須在(2)式中消去 p，这就需要利用椭圓运动的公式来作。

根据二体問題的討論，容易得出

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{r}\cos\frac{1}{2}f&=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{1}{2}E,\\
\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}f&=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{1}{2}E,\\
\sqrt{r'}\cos\frac{1}{2}f'&=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{1}{2}E',\\
\sqrt{r'}\sin\frac{1}{2}f'&=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{1}{2}E',\\
E-e\sin E&=\frac{k(t-T)}{a^{\frac{3}{2}}},\\
E'-e\sin E'&=\frac{k(t'-T)}{a^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在(1)，(2)，(3)式中，共有9个未知量：$\bar{y}$, a, e, p, T, f, f', E, E'. 除 $\bar{y}$ 外，我們都不需要，应該消去。

为簡单起見，令

$$f+f'=2F,\quad E'-E=2g,\quad E'+E=2G. \tag{4}$$

由(3)式不难得出

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{rr'}\cos v &= a\cos g - ae\cos G,\\ \sqrt{rr'}\sin v &= \sqrt{a}\sqrt{p}\sin g,\\ r+r' &= 2a-2ae\cos g\cos G,\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中第三式可以直接从 $r=a(1-e\cos E)$ 推出。在(5)式中容易消去 $e\cos G$. 由(5)式中第一、三两式可得

$$r+r'-2\sqrt{rr'}\cos v\cos g = 2a\sin^2 g,\tag{6}$$

由(3)式的最后两式得

$$\frac{k(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}}=2g-2e\sin g\cos G,$$

同(5)式消去 $e\cos G$ 后变成

$$\frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}}=2g-\sin 2g+\frac{2\sqrt{rr'}}{a}\sin g\cos v.\tag{7}$$

(2)式同(5)式的第二式消去 $\sqrt{p}$ 得

$$\bar{y}=\frac{\tau}{2\sqrt{a}\sqrt{rr'}\cos v\sin g}.\tag{8}$$

现在問題归結到从(6),(7),(8) 3 个方程解出 3 个未知量 $\bar{y}$, a, g. 由(6),(8);(7),(8)消去 a 可得

$$\left.\begin{aligned}&r+r'-2\sqrt{rr'}\cos v\left(1-2\sin^2\frac{1}{2}g\right)=\frac{\tau^2}{2\bar{y}^2 rr'\cos^2 v},\\ &\frac{8\bar{y}^3(\sqrt{rr'})^3\cos^3 v\sin^3 g}{\tau^2}=2g-\sin 2g\\ &\qquad\qquad+\frac{8\bar{y}^2(\sqrt{rr'})^3\cos^3 v\sin^3 g}{\tau^2}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

在这里令

$$m=\frac{\tau^2}{(2\sqrt{rr'}\cos v)^3},\qquad l=\frac{r+r'}{4\sqrt{rr'}\cos v}-\frac{1}{2},\tag{10}$$

則(9)式可化成

$$\bar{y}^2=\frac{m}{l+\sin^2\frac{1}{2}g},\qquad \bar{y}^3-\bar{y}^2=\frac{m(2g-\sin 2g)}{\sin^3 g}.\tag{11}$$

要在(11)式中消去 g 是不可能的，因这是超越方程。在椭圓的情况下，这些方程可以用逐步近似法来解。高斯用一种更簡单的方法，他把(11)式的第二式展开为

$$\bar{x} = \sin^2 \frac{1}{2} g \tag{12}$$

的冪級数。因为偏近点角的差 g 很小，可作为一級小量，故 $\bar{x}$ 为二級小量。在双曲綫軌道中 $\bar{x}<0$，在抛物綫軌道中 $\bar{x}=0$。
再令

$$x = \frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}, \tag{13}$$

即

$$x \sin^3 g = 2g - \sin 2g.$$

对 g 求微商得

$$3x\sin^2 g\cos g + \sin^3 g\frac{dx}{dg} = 2 - 2\cos 2g = 4\sin^2 g.$$

利用(12)式可得

$$\frac{dx}{dg} = \frac{dx}{d\bar{x}}\,\frac{d\bar{x}}{dg} = \frac{1}{2}\sin g\,\frac{dx}{d\bar{x}}.$$

以上式代入得

$$\frac{dx}{d\bar{x}} = \frac{8-6x\cos g}{\sin^2 g} = \frac{4-(3-6\bar{x})x}{2\bar{x}-2\bar{x}^2}. \tag{14}$$

这是 x 的微分方程，可求它的級数解。

令

$$x = \frac{4}{3}(1+\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}^2+\gamma\bar{x}^3+\cdots).$$

把(14)式两端乘以 $2\bar{x}-2\bar{x}^2$ 后，再以上式代入得

$$\frac{8}{3}[\alpha\bar{x}+(2\beta-\alpha)\bar{x}^2+(3\gamma-2\beta)\bar{x}^3+\cdots]$$
$$= (8-4\alpha)\bar{x}+(8\alpha-4\beta)\bar{x}^2+(8\beta-4\gamma)\bar{x}^3+\cdots.$$

比較两端的 $\bar{x}$ 的系数得

$$\alpha = \frac{6}{5},\quad \beta = \frac{8}{7}\alpha,\quad \gamma = \frac{10}{9}\beta,\quad \cdots,$$

因此就有

$$x=\frac{4}{3}\left(1+\frac{6}{5}\bar{x}+\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\bar{x}^2+\frac{6\cdot8\cdot10}{5\cdot7\cdot9}\bar{x}^3+\cdots\right). \tag{15}$$

高斯取

$$x=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{6}{5}(\bar{x}-\xi)},$$

则

$$1-\frac{6}{5}(\bar{x}-\xi)=\frac{4}{3}x^{-1}=1-\frac{6}{5}\bar{x}+\frac{12}{175}\bar{x}^2+\frac{312}{7875}\bar{x}^3+\cdots,$$

即

$$\xi=\frac{2}{35}\bar{x}^2+\frac{52}{1575}\bar{x}^3+\cdots. \tag{16}$$

ξ 可按 $\bar{x}$ 的值造表❶。于是(11)式成为

$$\bar{x}=\frac{m}{\bar{y}^2}-l, \tag{17}$$

$$\bar{y}^3-\bar{y}^2=mx=\frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6}-\bar{x}+\xi}=\frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6}+l+\xi-\frac{m}{\bar{y}^2}}. \tag{18}$$

再令

$$h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l+\xi}, \tag{19}$$

则(18)式成为

$$\bar{y}^3-\bar{y}^2=\frac{\frac{10}{9}h}{1-\frac{h}{\bar{y}^2}},$$

即

$$\bar{y}^3-\bar{y}^2-h\bar{y}-\frac{1}{9}h=0. \tag{20}$$

在这个三次方程中，$h>0$（在 $2v<180^\circ$ 时容易看出 l, m 都是正，而 ξ 是微小量，故 $h>0$），故只有一个正根。可用下述方法

❶ 参看 Дубяго 著：Определение Орбит，附表 XIX.

来解。首先令 $\xi=0$，由(10)式計算 l, m，再根据(19)式求 h [因由(16)式知 ξ 为四級小量]。其次利用輔助表❶解(20)式求出 $\bar{y}$，再根据(17)式求 $\bar{x}$；又根据(19)式求出 h；重新再查表求出 $\bar{y}$。一般情形不需要再作第二次近似。

如果 h 的值不大，用韓申法更方便。利用(20)式定义 h 为

$$h=\frac{(\bar{y}-1)\bar{y}^2}{\bar{y}+\frac{1}{9}},$$

并令

$$\bar{y}=1+z,$$

則

$$h=\frac{z(1+z)^2}{z+\frac{10}{9}}$$

或

$$\frac{z(1+z)^2}{1+\frac{9}{10}z}=\frac{10}{9}h. \tag{21}$$

由于 $$(1+z)^2=\left(1+\frac{9}{10}z\right)\left(1+\frac{11}{10}z\right)+\frac{1}{100}z^2,$$

(21)式成为

$$z\left(1+\frac{11}{10}z\right)+\frac{1}{100}\frac{z^3}{1+\frac{9}{10}z}=\frac{10}{9}h.$$

上式左边最后一项在时間間隔不大时非常小，可以略去，因此得

$$z=\bar{y}-1=\frac{\frac{10}{9}h}{1+\frac{11}{10}z}=\cfrac{\frac{10}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h}{1+\cdots}}}} \tag{22}$$

❶ 参看 Дубяго 著: Определение Орбит，附表 XVIII.

这就是韓申連分数，用計算机或对数都很容易計算。这里的 h 可根据(19)式計算，略去其中的 ξ，令

$$h=\frac{m}{\frac{5}{6}+l}. \tag{23}$$

在抛物綫和圆形軌道中，这个关系不很重要。

現在用天体的直角坐标来进行計算。設对应于时刻 t 和 t' 的坐标为 $x, y, z; x', y', z'$，有

$$rr'\cos 2v=xx'+yy'+zz'.$$

令
$$2(rr'+xx'+yy'+zz')=k^2, \tag{24}$$

則从(10)式和(23)式得

$$m=\frac{\tau^2}{k^3},\qquad l=\frac{1}{2}\left(\frac{r+r'}{k}-1\right),\qquad h=\frac{\tau^2}{k^2\left(\frac{k}{3}+\frac{r+r'}{2}\right)}. \tag{25}$$

在使用时，上面各量都应加上相应的脚数 i。

§8　第二次近似和以后的改进

利用 $\bar{y}_i$ 代入前面的方程可以求出 ρ_i。在(3-5-14)式中令

$$n_1=n_1^0+n_1^0\left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}-1\right),\qquad n_3=n_3^0+n_3^0\left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}-1\right). \tag{1}$$

为了能利用已熟悉的近似公式(3-5-6)，(3-5-8)，可令

$$\nu_1=n_1^0r_2^3\left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}-1\right),\qquad \nu_3=n_3^0r_2^3\left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}-1\right), \tag{2}$$

則 n_1, n_3 便可写成前面的形式了，即

$$n_1=n_1^0+\frac{\nu_1}{r_2^3},\qquad n_3=n_3^0+\frac{\nu_3}{r_2^3}.$$

应該根据 n_1, n_3 的值重新解(3-5-6)，(3-5-8)式，求出 ρ_2。再由(3-4-10)式解出 $n_1\rho_1$, $n_3\rho_3$；然后求出 ρ_1, ρ_3，然后根据(3-4-9)式求出 x_i, y_i, z_i。如果所得 ρ_i 与以前相差較大，則要重新修正行星

光行差。有了 x_i, y_i, z_i 又可重新計算 $\dot{y}_i$. 如此继續作下去，直到所得的 n_1, n_3 和前一次近似值相同为止(在所取精确度标准下)。

n_1, n_3 的值最后求出后，可由

$$x_2 = n_1x_1 + n_3x_3,$$
$$y_2 = n_1y_1 + n_3y_3,$$
$$z_2 = n_1z_1 + n_3z_3$$

求出 x_2, y_2, z_2. 再由

$$\left.\begin{aligned}\rho_2\cos\alpha_2\cos\delta_2 &= x_2 + X_2,\\ \rho_2\sin\alpha_2\cos\delta_2 &= y_2 + Y_2,\\ \rho_2\sin\delta_2 &= z_2 + Z_2\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

計算出 α_2, δ_2, 然后与观测比較作为驗算。

§9 軌道根数的求出

上面最后一次近似的結果，可以用来求軌道根数。由(3-7-2)式可計算 p.

因

$$\sqrt{p} = \frac{r_1r_3\sin(f_3-f_1)}{\tau_2}\bar{y}_2 = \frac{r_2r_3\sin(f_3-f_2)}{\tau_1}\bar{y}_1$$
$$= \frac{r_1r_2\sin(f_2-f_1)}{\tau_3}\bar{y}_3. \tag{1}$$

这是三个方程式，因 τ_2 比 τ_1, τ_3 大，常用第一个来求 $\sqrt{p}$. 要計算真近点角差的正弦，可利用关系

$$r_1r_3\sin(f_3-f_1)$$
$$= \sqrt{(y_1z_3-y_3z_1)^2+(z_1x_3-x_1z_3)^2+(x_1y_3-y_1x_3)^2}. \tag{2}$$

实際上，(2)式左端是由 r_1, r_3 組成的三角形面积的两倍；右端是它在三个坐标面上投影的平方和再开方。求出后用

$$r_1r_3\cos(f_3-f_1) = x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 \tag{3}$$

驗算。

(2)式計算起来不方便，可以令

$$\sigma=\frac{x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3}{r_1^2}=\frac{r_1r_3\cos(f_3-f_1)}{r_1^2}$$

$$=\frac{r_3\cos(f_3-f_1)}{r_1}, \tag{4}$$

并引入記号

$$\left.\begin{aligned}&x_0=x_3-\sigma x_1,\quad y_0=y_3-\sigma y_1,\quad z_0=z_3-\sigma z_1;\\&r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此可推出

$$r_0^2=r_3^2-2\sigma(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)+\sigma^2r_1^2$$

$$=r_3^2-\sigma^2r_1^2=r_3^2\sin^2(f_3-f_1),$$

即得

$$r_1r_3\sin(f_3-f_1)=r_1r_0. \tag{6}$$

如果用(6)式計算，可用(2)式来作驗算。

方程

$$r_1=\frac{p}{1+e\cos f_1},\qquad r_3=\frac{p}{1+e\cos f_3},$$

$$e\cos f_1=\frac{p}{r_1}-1=q_1,\qquad e\cos f_3=\frac{p}{r_3}-1=q_3, \tag{7}$$

可用来求眞近点角，最后的方程可化为

$$e\cos f_1\cos(f_3-f_1)-e\sin f_1\sin(f_3-f_1)=q_3,$$

故

$$e\sin f_1=\frac{q_1\cos(f_3-f_1)-q_3}{\sin(f_3-f_1)}. \tag{8}$$

由(7)，(8)两式可算出 e, f_1，所以 $f_3=f_1+(f_3-f_1)$ 也可算出。然后由

$$\sin\varphi=e,\quad a=p\sec^2\varphi=\frac{p}{1-e^2} \tag{9}$$

算出 φ, a. 如果軌道接近于抛物綫，則用

$$q=\frac{p}{1+e}. \tag{10}$$

在椭圓軌道中，可以用

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}&=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{f_1}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{E_3}{2}&=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{f_3}{2}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

来計算偏近点角。再由克普勒方程

$$M_1=E_1-e\sin E_1,\qquad M_3=E_3-e\sin E_3\tag{12}$$

計算平近点角。用(3-7-5)式的第二式

$$\sqrt{ap}\sin\frac{1}{2}(E_3-E_1)=\sqrt{r_1r_3}\sin\frac{1}{2}(f_3-f_1)\tag{13}$$

来驗算。

至于平均运动 n，可用下面两个式子来算。

$$n=\frac{M_3-M_1}{t_3-t_1};\tag{14}$$

$$n^0=k^0a^{-\frac{3}{2}},\qquad n''=k''a^{-\frac{3}{2}}.\tag{15}$$

所得的两个 n 的値应該相同(在計算的精度范圍内)。对于任意选擇的历元 t_0 时的平近点角 M_0，可用下面公式計算。

$$M_0=M_1+(t_0-t_1^0)n=M_3+(t_0-t_3^0)n.\tag{16}$$

剩下的問題就是求 Ω, ω, i. 根据日心赤道直角坐标公式

$$\begin{aligned}x_1&=P_xr_1\cos f_1+Q_xr_1\sin f_1,\\ x_3&=P_xr_3\cos f_3+Q_xr_3\sin f_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}P_x&=\frac{x_1r_3\sin f_3-x_3r_1\sin f_1}{r_1r_3\sin(f_3-f_1)},\\ Q_x&=\frac{x_3r_1\cos f_1-x_1r_3\cos f_3}{r_1r_3\sin(f_3-f_1)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

在定初軌时，f_3-f_1 是很小的角，故(17)中的分母很小，因而

求出的 P_x, Q_x,…不准确。用前面定义的 x_0, y_0, z_0 来作要更好些。

以 $f_3=f_1+(f_3-f_1)$ 代入，不难得到

$$\left.\begin{aligned} P_x &= x_1\frac{\cos f_1}{r_1}-\left[x_3-\frac{x_1 r_3\cos(f_3-f_1)}{r_1}\right] \\ &\quad\times\frac{\sin f_1}{r_3\sin(f_3-f_1)}, \\ Q_x &= x_1\frac{\sin f_1}{r_1}+\left[x_3-\frac{x_1 r_3\cos(f_3-f_1)}{r_1}\right] \\ &\quad\times\frac{\cos f_1}{r_3\sin(f_3-f_1)}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

由(4)，(5)，(6)式即得

$$\left.\begin{aligned} P_x &= x_1\frac{\cos f_1}{r_1}-x_0\frac{\sin f_1}{r_0}, \\ Q_x &= x_1\frac{\sin f_1}{r_1}+x_0\frac{\cos f_1}{r_0}. \end{aligned}\right.$$

同理得

$$\left.\begin{aligned} P_y &= y_1\frac{\cos f_1}{r_1}-y_0\frac{\sin f_1}{r_0}, \\ Q_y &= y_1\frac{\sin f_1}{r_1}+y_0\frac{\cos f_1}{r_0}; \\ P_z &= z_1\frac{\cos f_1}{r_1}-z_0\frac{\sin f_1}{r_0}, \\ Q_z &= z_1\frac{\sin f_1}{r_1}+z_0\frac{\cos f_1}{r_0}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

因为 x_i, y_i, z_i 可认为完全准确，r_1, r_0 不是小量，所以用(19)式就可以計算得很准确了。

由此可計算

$$A_x=aP_x,\quad B_x=a\cos\varphi Q_x,\quad \cdots,$$

幷可用下列各式驗算

$$A_x^2+A_y^2+A_z^2=a^2,\quad B_x^2+B_y^2+B_z^2=a^2(1-e^2),$$

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0.$$

最后根据 P_x, Q_x, …的定义很容易算出 Ω, ω, i. 因

$$\left.\begin{aligned} &\sin i \sin \omega = P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\ &\sin i \cos \omega = Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon, \\ &\quad \sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\ &\quad \cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega, \\ &\quad \cos i = -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \csc \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

由(20)式所得的 Ω, ω, i 等量,因每一个都有正弦和余弦,故可以在其中自行驗算。注意它們所对应的春分点和黄道历元应与观测值所給的相同。

§10 椭圓軌道計算公式总結

一般計算軌道所用的观测都是精确到 $0''.1$, 因此計算时需要用6位(最好是7位)三角函数表。这里所給的公式适宜用計算机进行計算,但某些地方用对数計算更方便。每一阶段都有驗算公式,可是这些公式对于很小的錯誤不容易发現,因此計算必須小心。

一、原始数据

在三个时刻 t_1, t_2, t_3 給出三个观测 (α_i, δ_i) 和由天文年历上查出的太阳直角坐标 (X_i, Y_i, Z_i), 即

$$\begin{aligned} &t_1, \alpha_1, \delta_1, X_1, Y_1, Z_1, \\ &t_2, \alpha_2, \delta_2, X_2, Y_2, Z_2, \\ &t_3, \alpha_3, \delta_3, X_3, Y_3, Z_3. \end{aligned} \tag{I}$$

其中 (α_i, δ_i) 和 X_i, Y_i, Z_i 应該对应于同历元的春分点和黄道, (α_i, δ_i) 应根据 §3 作視差修正, 或者直接修正 X_i, Y_i, Z_i. 修正量为

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= -\rho_0 p_\odot \sin 1'' \cos \varphi' \cos s_i, \\ \Delta Y_i &= -\rho_0 p_\odot \sin 1'' \cos \varphi' \sin s_i, \\ \Delta Z_i &= -\rho_0 p_\odot \sin 1'' \sin \varphi'. \end{aligned}$$

故太阳坐标应取 $X_i+\Delta X_i$, $Y_i+\Delta Y_i$, $Z_i+\Delta Z_i$。至于行星的光行差,在求出 ρ_i 的近似值后再作修正。

二、求輔助量

$$\left.\begin{aligned} a_i&=\cos\delta_i\cos\alpha_i,\\ b_i&=\cos\delta_i\sin\alpha_i,\\ c_i&=\sin\delta_i,\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,3).\tag{II}$$

驗算式为

$$\begin{aligned} &a_i^2+b_i^2+c_i^2=1,\\ &a_i-c_i\sin\alpha_i=\cos(\alpha_i+\delta_i),\\ &b_i+c_i\cos\alpha_i=\sin(\alpha_i+\delta_i).\end{aligned}$$

然后再計算

$$\left.\begin{aligned} 2R_i\cos\theta_i&=-2(a_iX_i+b_iY_i+c_iZ_i),\\ R_i^2&=X_i^2+Y_i^2+Z_i^2.\end{aligned}\right\}\tag{III}$$

驗算式为

$$(X_i-a_i)^2+(Y_i-b_i)^2+(Z_i-c_i)^2=R_i^2+2R_i\cos\theta_i+1.$$

列出方程式

$$\left.\begin{aligned} a_1n_1\rho_1-a_2\rho_2+a_3n_3\rho_3&=n_1X_1-X_2+n_3X_3,\\ b_1n_1\rho_1-b_2\rho_2+b_3n_3\rho_3&=n_1Y_1-Y_2+n_3Y_3,\\ c_1n_1\rho_1-c_2\rho_2+c_3n_3\rho_3&=n_1Z_1-Z_2+n_3Z_3.\end{aligned}\right\}\tag{IV}$$

由这三个方程逐步消去 $n_1\rho_1$, $n_3\rho_3$,得出 ρ_2 的方程式

$$-D\rho_2=n_1d_1-d_2+n_3d_3.$$

三、第一次近似

$$\left.\begin{aligned} &\tau_1=k(t_3-t_2),\quad \tau_2=k(t_3-t_1),\quad \tau_3=k(t_2-t_1).\\ &\qquad k=0.01720210,\\ &n_1^0=\frac{\tau_1}{\tau_2},\qquad n_3^0=\frac{\tau_3}{\tau_2};\\ &\nu_1=\frac{1}{6}\tau_1\tau_3(1+n_1^0),\quad \nu_3=\frac{1}{6}\tau_1\tau_3(1+n_3^0).\end{aligned}\right\}\tag{V}$$

驗算式为 $n_1^0+n_3^0=1, \qquad \nu_1+\nu_3=\frac{1}{2}\tau_1\tau_3.$

$$k_0=\frac{n_1^0d_1-d_2+n_3^0d_3}{-D}, \qquad l_0=\frac{d_1\nu_1+d_3\nu_3}{D}. \tag{VI}$$

驗算式为 $k_0=\frac{l_0}{R_2^3}$（很近似）。

然后得到

$$\left.\begin{aligned} \rho_2&=k_0-\frac{l_0}{r_2^3},\\ r_2^2&=R_2^2+2R_2\cos\theta_2\rho_2+\rho_2^2.\end{aligned}\right\} \tag{VII}$$

从 (VII) 式的两式可以用逐次近似法求出 ρ_2, r_2. 第一步令 $\rho_2=k_0$，代入第二式求出 r_2^2，查表❶得到 r_2^{-3}；再代入第一式求 ρ_2 的值，又代入第二式求 r_2^2. 如此继續下去直到得出連續两次的値相同为止。故得到了 r_2, ρ_2. 再由

$$n_1=n_1^0+\frac{\nu_1}{r_2^3}, \qquad n_3=n_3^0+\frac{\nu_3}{r_2^3} \tag{VIII}$$

算出 n_1, n_3，代入公式(IV)的右端，解出 $n_1\rho_1$, ρ_2, $n_3\rho_3$，解出后代回(IV)式作驗算。然后得

$$\rho_1=\frac{n_1\rho_1}{n_1}, \qquad \rho_3=\frac{n_3\rho_3}{n_3}.$$

再計算

$$\left.\begin{aligned} r_1^2&=R_1^2+2R_1\cos\theta_1\rho_1+\rho_1^2,\\ r_3^2&=R_3^2+2R_3\cos\theta_3\rho_3+\rho_3^2,\\ x_i&=a_i\rho_i-X_i,\\ y_i&=b_i\rho_i-Y_i,\\ z_i&=c_i\rho_i-Z_i.\end{aligned}\right\} \tag{IX}$$

驗算式为

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2=r_i^2,$$

$$x_2=n_1x_1+n_3x_3,$$

---

❶ 參看 Дубяго 著：Определение Орбит，附表 XXII.

$$y_2 = n_1 y_1 + n_3 y_3,$$

$$z_2 = n_1 z_1 + n_3 z_3.$$

四、第一次近似結果的改进

首先根据所得的 ρ_i 修正光行差。由

$$t_i^0 = t_i - A\rho_i, \qquad A = 0^d.005772,$$

然后由 t_i^0 重新从(V)式計算 τ_i 和 n_1^0, n_3^0.

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &= 2(r_2 r_3 + x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3),\\ k_2^2 &= 2(r_1 r_3 + x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3),\\ k_3^2 &= 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2); \end{aligned}\right\} \qquad (X)$$

$$h_1 = \frac{\tau_1^2}{k_1^2\left(\frac{k_1}{3} + \frac{r_2 + r_3}{2}\right)}, \qquad h_2 = \frac{\tau_2^2}{k_2^2\left(\frac{k_2}{3} + \frac{r_1 + r_3}{2}\right)},$$

$$h_3 = \frac{\tau_3^2}{k_3^2\left(\frac{k_3}{3} + \frac{r_1 + r_2}{2}\right)}.$$

根据所得的 h_i 查表❶得出 $\bar{y}_i$. 如果沒有表則用下面展开式来求。

$$\bar{y}_i = 1 + \frac{10}{11}\cfrac{\frac{11}{9}h_i}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_i}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_i}{1 + \cfrac{\frac{11}{9}h_i}{1 + \cdots}}}}$$

$$\frac{10}{11} = 0.909091, \qquad \frac{11}{9} = 1.222222.$$

如果观测的时間間隔較長,还須作下列修正

$$m_i = \frac{\tau_i^2}{k_i^3},$$

---

❶ 参看 Дубято 著: Определение Орбит, 附表 XVIII.

$$l_1=\frac{1}{2}\left(\frac{r_2+r_3}{k_1}-1\right),$$

$$l_2=\frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_3}{k_2}-1\right),$$

$$l_3=\frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_2}{k_3}-1\right).$$

其中 k_i^{-3} 及 k_i^{-1} 可由 k_i^2 查表❶得 k_i^{-3}，而 $k_i^{-1}=k_i^2\cdot k_i^{-3}$。然后

$$h_i=\frac{m_i}{\frac{5}{6}+l_i+\xi_i}, \qquad \bar{x}_i=\frac{m_i}{\bar{y}_i^2}-l_i.$$

由 $\bar{x}_i$ 查表❷得到 ξ_i，再算出 h_i，查表得到 $\bar{y}_i$。

$$n_1=n_1^0\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}, \qquad n_3=n_3^0\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}. \tag{XI}$$

如果所得到的 n_1 和 n_3 同前面得到的值只差最后一位小数的 3～5 个单位，而三个观测时刻之間只差一个月左右，則用前面的值直接去算軌道根数就行了。如果不是这样，則需計算出

$$\nu_1=n_1^0\left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}-1\right)r_2^3, \qquad \nu_3=n_3^0\left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}-1\right)r_2^3, \tag{XII}$$

代入(VI)式求出 l_0，再解(VII)式得到 r_2，ρ_2。并把(XI)式的 n_1，n_3 值代入(IV)式重新解出 ρ_1，ρ_3，再由(IX)式得到 r_1，r_3 和 x_i，y_i，z_i，这就是第二次近似值。在通常的情况下很少再进一步求第三次近似，但如果观测时刻之間相差較大，还要再作。結果用下式驗算

$$\left.\begin{aligned} x_2&=n_1x_1+n_3x_3,\\ y_2&=n_1y_1+n_3y_3,\\ z_2&=n_1z_1+n_3z_3. \end{aligned}\right\} \tag{XIII}$$

五、求出軌道根数

---

❶ 参看 Дубяго 著：Определение Орбит，附表 XXII.

❷ 同上书，附表 XIX.

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3}{r_1^2},\\ x_0 &= x_3-\sigma x_1,\\ y_0 &= y_3-\sigma y_1,\\ z_0 &= z_3-\sigma z_1,\\ r_0^2 &= x_0^2+y_0^2+z_0^2.\end{aligned}\right\}\qquad \text{(XIV)}$$

驗算式

$$\left.\begin{aligned}&(r_1r_0)^2=(y_1z_3-z_1y_3)^2+(z_1x_3-x_1z_3)^2+(x_1y_3-y_1x_3)^2,\\ &\sin(f_3-f_1)=\frac{r_0}{r_3},\\ &\cos(f_3-f_1)=\frac{\sigma r_1}{r_3}.\end{aligned}\right\}\text{(XV)}$$

由上两式得到的 f_3-f_1 应該相同，这就可以用来驗算。

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{p}=\frac{r_1r_0}{r_2}\bar{y}_2,\\ &q_1=\frac{p}{r_1}-1,\qquad q_3=\frac{p}{r_3}-1;\\ &e\cos f_1=q_1,\\ &e\sin f_1=\frac{q_1\cos(f_3-f_1)-q_3}{\sin(f_3-f_1)},\\ &f_3=f_1+(f_3-f_1).\end{aligned}\right\}\qquad\text{(XVI)}$$

驗算式 $$e\cos f_3=q_3.$$

$$\left.\begin{aligned}&e=\sin\varphi,\qquad a=\frac{p}{1-e^2},\\ &\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{f_1}{2}=\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\frac{f_1}{2},\\ &\operatorname{tg}\frac{E_3}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{f_3}{2}=\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\frac{f_3}{2}.\end{aligned}\right\}\text{(XVII)}$$

驗算式

$$a\cos\varphi\sin\frac{1}{2}(E_3-E_1)=\sqrt{r_1r_3}\sin\frac{1}{2}(f_3-f_1).$$

$$
\left.\begin{aligned}
&M_1=E_1-e\sin E_1, \qquad M_3=E_3-e\sin E_3,\\
&e^0=57.29578e, \qquad e''=206264''.81e,\\
&n=\frac{M_3-M_1}{t_3-t_1}=ka^{-\frac{3}{2}};\\
&k^0=0^\circ.985608, \qquad k''=3548''.188.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XVIII)}
$$

用两种方式得到的 n 应該相同，也就是驗算。

对任意选擇的历元 t_0 有

$$M_0=M_1+n(t_0-t_1^0)=M_3+n(t_0-t_3^0).$$

$$
\left.\begin{aligned}
&P_x=x_1\frac{\cos f_1}{r_1}-x_0\frac{\sin f_1}{r_0},\\
&Q_x=x_1\frac{\sin f_1}{r_1}+x_0\frac{\cos f_1}{r_0},\\
&P_y=y_1\frac{\cos f_1}{r_1}-y_0\frac{\sin f_1}{r_0},\\
&Q_y=y_1\frac{\sin f_1}{r_1}+y_0\frac{\cos f_1}{r_0},\\
&P_z=z_1\frac{\cos f_1}{r_1}-z_0\frac{\sin f_1}{r_0},\\
&Q_z=z_1\frac{\sin f_1}{r_1}+z_0\frac{\cos f_1}{r_0};\\
&A_x=aP_x, \qquad A_y=aP_y, \qquad A_z=aP_z;\\
&B_x=a\cos\varphi\, Q_x,\ B_y=a\cos\varphi\, Q_y,\ B_z=a\cos\varphi\, Q_z.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIX)}
$$

驗算式 $\quad A_x^2+A_y^2+A_z^2=a^2, \qquad B_x^2+B_y^2+B_z^2=a^2\cos^2\varphi,$

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0.$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\sin i\sin\omega=P_z\cos\varepsilon-P_y\sin\varepsilon,\\
&\sin i\cos\omega=Q_z\cos\varepsilon-Q_y\sin\varepsilon,\\
&\qquad\sin\Omega=(P_y\cos\omega-Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon,\\
&\qquad\cos\Omega=P_x\cos\omega-Q_x\sin\omega,\\
&\qquad\cos i=-(P_x\sin\omega+Q_x\cos\omega)\csc\Omega.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(XX)}
$$

用正弦和余弦所得的 $\Omega,\ \omega,\ i$ 应相同，也就是驗算。

六、同觀測比較

最后用第二个观测或其他未用作軌道計算的观测来作驗算。設时刻为 t，修正行星光行差后記为 t^0。

$$\left.\begin{aligned}&M=M_0+n(t^0-t_0),\\&E=M+e\sin E,\\&\rho\cos\alpha\cos\delta=A_x(\cos E-e)+B_x\sin E+X,\\&\rho\sin\alpha\cos\delta=A_y(\cos E-e)+B_y\sin E+Y,\\&\rho\sin\delta=A_z(\cos E-e)+B_z\sin E+Z.\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{XXI})$$

所計算出的 (α,δ) 記为 (α_c,δ_c)，观測值为 (α_0,δ_0)，則求出

$$0-C\left\{\begin{aligned}\cos\delta\,\Delta\alpha&=(\alpha_0-\alpha_c)\cos\delta,\\\Delta\delta&=(\delta_0-\delta_c).\end{aligned}\right.$$

其中 $0-C$ 表示观測值与計算值之差，这两个值在較好的情况下不超过 $1''$。

軌道計算例子

紫金二号小行星

1955. U. T.	α 1950.0	δ 1950.0	
XI 11.65757	$1^h40^m38^s.76$	$+17°40'29''.5$	紫金山天文台的位置：
*12.62915	1 39 54.48	17 36 01.4	$\lambda=7^h55^m16^s.97^E$
16.61311	1 37 24.09	17 19 40.9	$\varphi=32°03'59''.9$
18.67282	1 36 15.80	17 11 34.8	
20.63958	1 35 17.22	17 04 13.2	
22.63018	1 34 25.10	16 57 02.4	
24.55135	1 33 41.33	16 50 32.0	
XII* 2.48595	1 31 52.02	16 28 14.9	
3.46234	1 31 46.60	16 26 03.9	
6.51224	1 31 41.02	16 20 10.1	
9.44282	1 31 52.20	16 15 46.6	
13.43387	1 32 33.20	16 11 52.0	
*17.52556	1 33 43.77	16 11 28.1	

A. 已知量

ε	36°17′15″	4°18′15″	33°23′15″
$\cos\varepsilon$	0.806038	0.997179	0.834968

$\sin s$	0.591837	0.076051	0.550298
(X)	−0.644447	−0.3463095	−0.08060
(Y)	−0.6891627	−0.846790	−0.898963
(Z)	−0.298879	−0.367231	−0.389853
$10^7 Ox$	−292	−361	−302
$10^7 Oy$	−214	−27	−199
$10^7 Oz$	−227	−227	−227
x	−0.644470	−0.346346	−0.090641
y	−0.689184	−0.846792	−0.898983
z	−0.298816	−0.367254	−0.389876

B. 輔助量

$\cos\delta$	0.953189	0.958964	0.960418
$\cos\alpha$	0.906477	0.920731	0.917530
$\sin\alpha$	0.422255	0.390197	0.397666
$\sin\delta$	0.302376	0.283523	0.278563
I			
a	0.864045	0.882948	0.881212
b	0.402489	0.374188	0.381926
c	0.302376	0.283527	0.278563
II			
$\cos(\alpha+\delta)$	0.736364	0.772828	0.770437
$\sin(\alpha+\delta)$	0.676586	0.635233	0.647516
III			
$2R\cos\theta$	1.849238	1.453577	1.063646
R^2	0.979655	0.971888	0.968389

IV

$n_1\rho_1$	ρ_2	$n_3\rho_3$	n_1		n_3
+0.864045	−0.882948	+0.881212	−0.644470	+0.346346	−0.090641
+0.402489	−0.374185	+0.381926	−0.689184	+0.846793	−0.898983
+0.302376	−0.283527	+0.278567	−0.298896	+0.367253	−0.389876

$$\frac{b_3}{c_3}=\frac{0.381926}{0.881212}=0.453410\qquad \frac{a_3}{c_3}=\frac{0.881212}{0.278563}=3.163421$$

0.028003	0.008493		−0.409864	0.696682	−0.859608
0.092498	−0.013967		−0.301004	0.816430	−1.042701

$$\frac{0.628013}{0.092498} = -0.302742$$

$$-0.012721\ \rho_2 = 0.318719\ n_1 - 0.449817 + 0.513754\ n_3$$

$$D = +0.012721 \qquad d_1 = 0.318719 \qquad d_2 = 0.449817 \qquad d_3 = 0.513754$$

C. 第一次近似

V			
$t-t'$	15.03961	34.8964	19.85680
r	0.258713	0.600292	0.341579
n_1^0	0.430979		
n_3^0	0.569021		
Δ_n	0.021075		0.023109
VI			
k^0	1.531558		l_0 1.461284
VII			
ρ_2	1.459093		
r_2^2	5.221744		
r_2^{-3}	0.0838063		
ρ_2	1.459093		
VIII			
n_1	0.432745		0.570958
$n\rho$	0.573939		0.917029
ρ	1.326275		1.606123
ρ	1.326275	1.459093	1.606123
r^2	5.191258	5.221744	5.256366
IX			
x	1.790431	1.634649	1.505976
y	1.222995	1.392763	1.512403
z	0.699930	0.780946	0.837282
x^2	3.205643	2.672077	2.267964
y^2	1.495717	1.939789	2.287363
z^2	0.489902	0.609877	0.701041
r^2	5.1191262	5.221743	5.256368
r	2.278434	2.285113	2.292677
r^3		11.932275	

D. 第二次近似　　$A=0.005772$

$\Delta\rho$	0.007655	0.00843	0.00927
t^0	12.61250	32.47753	47.51629
Δt^0	15.03876	34.89479	19.85603
k	0.0172021		
τ_0	0.258608	0.600264	0.341565
n^0	0.430674		0.569025
X			
τ_0^2	0.066925	0.363317	0.116667
x^2	20.922118	20.711518	20.766310
x	4.574070	4.550991	4.557007
$\frac{r+r'}{2}$	2.288605	2.285533	2.281773
h	0.000839	0.004575	0.001478
$\bar{y}$	1.000931	1.005054	1.001639
$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}$	1.004120		
$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}$	1.003410		
XI			
n	0.432750		0.570965
XII			
ν	0.021187		0.0023153
XIII			
k_0	1.581479		
l_0	1.465922		
XIV			
ρ_0	1.458625	1.458550	1.458541
$r_2^{\frac{3}{2}}$	5.219699	5.210370	5.219330
r_2^{-3}	0.083858	0.0838635	0.083864
$n_1\rho_1$	0.573684		0.916720
ρ	1.325668	1.458541	1.605567
r^2	5.188528	5.219332	5.253948
x	1.783907	1.634162	1.505477
y	1.222751	1.392556	1.512187
z	0.690746	0.780739	0.837125

r	2.277835	2.284685	2.292149

E. 第三次近似

n^0	0.430974		0.569025
x^2	20.912450	20.701208	20.756018
x	4.573013	4.549853	4.555877
$\bar{y}$	1.000937	1.005059	1.001640
$\frac{\bar{y}_3}{\bar{y}_1}$	1.004124		1.003413
n	0.432751		0.570967

F. 軌道根数的計算

XV

σ	0.988616		
x_0	-0.264054		
y_0	$+0.303356$		
z_0	$+0.145345$		
r_0^2	0.182875		
r_0	0.427639	($r_1=2.277835$	$r_3=2.292149$)
r_0r_1	0.974091		

XVI

$\sqrt{p}$	1.630981		
p	2.660099		
$q=e\cos f$	0.167819		0.160526
$e\sin f$	0.023295		
$\operatorname{tg} f_1$	0.138810	$f_1=7°54'10''$	$\frac{f_1}{2}=3°57'05''$
$\sin(f_3-f_1)$	0.186567		
$\cos(f_3-f_1)$	0.992442		
f_3-f_1	10°45'09''		
f_3	18°39'19''	$\frac{f_3}{2}=9°19'40''$	
e	0.169428	$e^2=0.028706$	
φ	9°45'16''	$\frac{\varphi}{2}=4°52'38''$	
a	2.738717		

XVII

$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$	0.842757

$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}$	0.058213	$E_1=6°39'48''$	
$\operatorname{tg}\frac{E_3}{2}$	0.138416	$E_3=15°45'44''$	
$\sin E_1$	0.116035	$e\sin E_1$	0.019660
$\sin E_3$	0.271648	$e\sin E_3$	0.040028
M_1	5°536895		
M_3	13°125239		
n	0°217463		

XVIII

$\frac{\cos f_1}{r_1}$	0.434844	$\frac{\sin f_1}{r_3}$	0.321517	$\sin i$ 0.074400 $\cos i$ 0.997228
$\frac{\sin f_1}{r_1}$	0.000361	$\frac{\cos f_1}{r_3}$	2.316213	i 4°16'2''
P_x	0.863228	Q_x	−0.503564	
P_y	0.434122	Q_y	0.776443	
P_z	0.257549	Q_z	0.378887	

XIX

$\sin i\sin\omega$	0.063536	$\sin\Omega$	−0.476883
$\sin i\cos\omega$	0.038672	$\cos\Omega$	0.878964
$\operatorname{ctg}\omega$	0.608663	$\operatorname{tg}\Omega$	−0.542561
ω	58°40'22''	Ω	−28°28'36''
$\sin\omega$	0.854215	$\operatorname{cosec}\Omega$	−2.096937
$\cos\omega$	0.519925		

G. 小行星的軌道根数：历元 1955 XI 12.0

n_0	5°401749	ω	58°67278
φ	9°754410	Ω	331°51778
e	0.169428	i	4°26722
a	2.738717		
n	0.217463		
A_x	2.364137	B_x	−1.359182
A_y	1.189074	B_y	+2.005716
A_z	0.705354	B_z	+1.022663

H. 星历表的計算,观测值与計算值的比較

t_0	12.62150	32.47753	47.51629
M	5.526395	9.854847	13.12522

E	6.663330	11.847038	15.762202
$\cos E$	0.993245	0.9788686	0.962398
$\cos E - e$	0.823817	0.809258	0.792970
$\sin E$	0.116035	0.203315	0.271645
$\rho \cos\alpha \cos\delta$	1.145433	1.287791	1.414834
$\rho \sin\alpha \cos\delta$	0.533571	0.545758	0.613208
$\rho \sin\delta$	0.400852	0.413528	0.447250
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0.465823	0.423704	0.433413
α	24°58′38″.2	22°58′01″	23°25′57″.0
$\sin\alpha$	2.422259	0.390200	0.397669
$\rho\cos\delta$	1.263611	1.398632	1.542006
$\mathrm{tg}\,\delta$	0.317227	0.295660	0.290044
δ	17°36′01″.5	16°28′15″.2	16°10′28″.2
$\Delta\delta$	−0″.1	−0″.3	−0″.1
$\Delta\alpha$	−1″.0	−0″.7	−0″.5
$\cos\delta$	0.953191	0.958971	0.960415
$\Delta\alpha\cos\delta$	−0″.95	+0″.19	−0″.48

§11 用四个观測計算橢圓軌道的基本公式

由前面可知，在求 ρ_2 的式子中，包含了 D 作分母，在 D 接近于零时无效。如果观測較多，可以选擇另外三个观測来作，但在大多数情况下，观測数量不多，另外，选擇的三个观測也不一定有效，只得用四个观測来計算。特別是天体軌道同黃道相差很小时，正如前面已說过的，一定要用四个观測才能定出軌道根数。用四个观測的基本方程式和用三个观測不同；三个观測中是一个地心距(ρ_2)，四个观測中是两个地心距(ρ_1，ρ_4)。

下面所述的方法基本上还是高斯的方法，但有很多改变。高斯是用第二、三两次观測来作基本方程，后来鮑辛格尔改用第一、四两个观測，但用的是对数計算形式；又由菲頓(Veitnen)改为計算机計算的形式，他們用黃道坐标系作标准；后又由苏保金改为赤

道坐标系。用这两种坐标系进行計算，很难說哪种更好些。

用四个观測計算軌道要比用三个观測复杂些，因此，在进行逐次近似計算时不容易准确，有必要在第一次近似就相当准。但如果四个观測的时間間隔不太大时，鮑辛格尔的公式已够准确的了。然而在极少数情形中，不能用它得到满意的解，在这时要作軌道改进。

下面是用赤道坐标系作标准，所用的最初几个公式同三次观測中相似，只是增加了一个，故 $i=1, 2, 3, 4$. 在(3-4-10)式用 1, 2, 4 和 1, 3, 4 次观測代入得到两个方程組

$$\left.\begin{aligned}a_1n_1\rho_1-a_2\rho_2+a_4n_4\rho_4&=n_1X_1-X_2+n_4X_4,\\ b_1n_1\rho_1-b_2\rho_2+b_4n_4\rho_4&=n_1Y_1-Y_2+n_4Y_4,\\ c_1n_1\rho_1-c_2\rho_2+c_4n_4\rho_4&=n_1Z_1-Z_2+n_4Z_4;\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}a_1n_1'\rho_1-a_3\rho_3+a_4n_4'\rho_4&=n_1'X_1-X_3+n_4'X_4,\\ b_1n_1'\rho_1-b_3\rho_3+b_4n_4'\rho_4&=n_1'Y_1-Y_3+n_4'Y_4,\\ c_1n_1'\rho_1-c_3\rho_3+c_4n_4'\rho_4&=n_1'Z_1-Z_3+n_4'Z_4.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中

$$\frac{[r_2, r_4]}{[r_1, r_4]}=n_1,\qquad \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_4]}=n_4,$$
$$\frac{[r_3, r_4]}{[r_1, r_4]}=n_1',\qquad \frac{[r_1, r_3]}{[r_1, r_4]}=n_4'.\tag{3}$$

由(1)，(2)两組方程中每組取两个方程消去 ρ_2 [在 (1) 式]和 ρ_3 [在 (2) 式]。如果天体軌道同黄道很接近，最好取每組的前两式。在一般情况下，因为要使 ρ_4 的值更准确，故在 $a_2b_4-a_4b_2$, $b_2c_4-c_2b_4$, $a_2c_4-c_2a_4$ 中看哪一个最大，再决定取相应的两式。在(2)式中，选擇方法相似。

下面是取前两式。消去 ρ_2, ρ_3 后得

$$\left.\begin{aligned}\rho_4&=A\frac{n_1}{n_4}\rho_1+B\frac{n_1}{n_4}+C\frac{1}{n_4}+D,\\ \rho_4&=A'\frac{n_1'}{n_4'}\rho_1+B'\frac{n_1'}{n_4'}+C'\frac{1}{n_4'}+D'.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&A=\frac{(a_1b_2-b_1a_2)}{\Delta}, \qquad B=-\frac{(b_2X_1-a_2Y_1)}{\Delta},\\
&C=\frac{(b_2X_2-a_2Y_2)}{\Delta}, \qquad D=-\frac{(b_2X_4-a_2Y_4)}{\Delta},\\
&\qquad\qquad \Delta=a_2b_4-b_2a_4;\\
&A'=\frac{(a_1b_3-b_1a_3)}{\Delta'}, \qquad B'=-\frac{(b_3X_1-a_3Y_1)}{\Delta'},\\
&C'=\frac{(b_3X_3-a_3Y_3)}{\Delta'}, \qquad D'=-\frac{(b_3X_4-a_3Y_4)}{\Delta'},\\
&\qquad\qquad \Delta'=a_3b_4-b_3a_4.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

除此以外，必須用已知量来表示三角形面积之比。在现有的条件下，可以用下面的奥波耳彻尔的近似公式。取 (3-4-27) 式表示 r_1, r_2, r_4 組成的三角形面积之比；然后再表示 r_1, r_3, r_4, 可得到 n_1, n_4, n_1', n_4', 其中向徑和 $\frac{dr}{d\tau}$ 都是指中間的观测数值 (r_2 或 r_3)。所得的式子是准确到 τ 的三次幂項，以后也保持这个准确度。

用下列記号

$$\tau_1=k(t_4-t_2), \qquad \tau_2=k(t_4-t_1), \qquad \tau_4=k(t_2-t_1),$$
$$\tau_1'=k(t_4-t_3), \qquad \tau_3'=\tau_2=k(t_4-t_1), \qquad \tau_4'=k(t_3-t_1).$$

首先注意，对 r_2 可只准确到 τ 的一次幂，可以令

$$r_1=r_2-\tau_4\frac{dr}{d\tau}+\cdots, \qquad r_4=r_2+\tau_1\frac{dr}{d\tau}+\cdots.$$

对 $\frac{dr}{d\tau}$ 只准确到 τ 的零次幂，可以取

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{r_4-r_1}{\tau_2}+\cdots.$$

相应有

$$\begin{aligned}
r_2&=\frac{r_1+r_4}{2}+\frac{\tau_4-\tau_1}{2}\frac{dr}{d\tau}+\cdots\\
&=\frac{r_1+r_4}{2}+\frac{\tau_4-\tau_1}{2\tau_2}(r_4-r_1)+\cdots,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r_2^3}=\frac{8}{(r_1+r_4)^3}-\frac{24(\tau_4-\tau_1)(r_4-r_1)}{\tau_2(r_1+r_4)^4}+\cdots,$$

$$\frac{1}{r_2^4}\;\frac{dr}{d\tau}=\frac{16(r_4-r_1)}{\tau_2(r_1+r_4)^4}+\cdots.$$

把这些式子代入(3-4-2)的第一式中得

$$n_1=\frac{\tau_1}{\tau_2}\left\{1+\frac{4}{3}\;\frac{\tau_4(\tau_2+\tau_1)}{(r_1+r_4)^3}\right.$$
$$\left.+4\,\frac{\tau_4[(\tau_4^2+\tau_1\tau_4-\tau_1^2)-(\tau_2+\tau_1)(\tau_4-\tau_1)]}{\tau_2(r_1+r_4)^4}(r_4-r_1)+\cdots\right\}. \tag{6}$$

或根据等式 $\tau_2=\tau_1+\tau_4$ 得

$$n_1=\frac{\tau_1}{\tau_2}\left\{1+\frac{4}{3}\;\frac{\tau_2^2-\tau_1^2}{(r_1+r_4)^3}+\frac{4\tau_1^2\tau_4}{\tau_2}\;\frac{r_4-r_1}{(r_1+r_4)^4}+\cdots\right\}. \tag{7}$$

如把前面的式子代入 (3-4-2) 的第二式中卽得 n_4，与(7)式相似，只是把其中的$(r_1,\ \tau_1)$及$(r_4,\ \tau_4)$互相交換，卽

$$n_4=\frac{\tau_4}{\tau_2}\left\{1+\frac{4}{3}\;\frac{\tau_2^2-\tau_4^2}{(r_1+r_4)^3}-\frac{4\tau_1\tau_4^2}{\tau_2}\;\frac{r_4-r_1}{(r_4+r_1)^4}+\cdots\right\}. \tag{8}$$

对于 r_1，r_3，r_4，用(7)，(8)就能表出 n_1'，n_4'，其中只把 τ_1，τ_4 换成 τ_1'，τ_4' 就行了，不需要其它的变化。

向徑 r_1，r_4 可由下式定出：

$$\left.\begin{aligned}r_1^2&=R_1^2+2R_1\cos\theta_1\rho_1+\rho_1^2,\\ r_4^2&=R_4^2+2R_4\cos\theta_4\rho_4+\rho_4^2.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&R_1^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2,\quad R_4^2=X_4^2+Y_4^2+Z_4^2,\\ &R_1\cos\theta_1=-(a_1X_1+b_1Y_1+c_1Z_1),\\ &R_4\cos\theta_4=-(a_4X_4+b_4Y_4+c_4Z_4).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

令

$$\xi=\frac{1}{(r_1+r_4)^3},\qquad \eta=\frac{r_4-r_1}{r_1+r_4}, \tag{11}$$

則由(7)，(8)两式及其相应的 n_1'，n_4' 式可得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{n_1}{n_2}&=\frac{\tau_1}{\tau_4}+\frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_4}(\tau_2-\tau_1)\xi+4\tau_1^2\xi\eta,\\
\frac{1}{n_4}&=\frac{\tau_2}{\tau_4}-\frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_4}(\tau_2+\tau_4)\xi+4\tau_1\tau_4\xi\eta,\\
\frac{n_1'}{n_2'}&=\frac{\tau_1'}{\tau_4'}+\frac{4}{3}\frac{\tau_1'\tau_2}{\tau_4'}(\tau_2-\tau_1')\xi+4\tau_1'^2\xi\eta,\\
\frac{1}{n_4'}&=\frac{\tau_2}{\tau_4'}-\frac{4}{3}\frac{\tau_1'\tau_2}{\tau_4'}(\tau_2+\tau_4')+4\tau_1'\tau_4'\xi\eta.
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

代入(4)式得

$$\left.\begin{aligned}
\rho_4&=(G+H\xi+I\xi\eta)\rho_1+K+L\xi+M\xi\eta=P\rho_1+Q,\\
\rho_4&=(G'+H'\xi+I'\xi\eta)\rho_1+K'+L'\xi+M'\xi\eta=P'\rho_1+Q'.
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&E=\frac{\tau_1}{\tau_4}, &&E'=\frac{\tau_1'}{\tau_4'},\\
&F=\frac{4}{3}\tau_1\tau_2, &&F'=\frac{4}{3}\tau_1'\tau_2',\\
&G=AE, &&G'=A'E',\\
&H=F(A-G), &&H'=F'(A'-G'),\\
&I=4\tau_1^2A, &&I'=4\tau_1'^2A',\\
&K=E(B+C)+C+D, &&K'=E'(B'+C')+C'+D',\\
&L=F(B-C-D-K), &&L'=F'(B'-C'-D'-K'),\\
&M=4(\tau_1^2B+\tau_1\tau_4C), &&M'=4(\tau_1'^2B'+\tau_1'\tau_4'C').
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

(9)式和(13)式共4个方程，包含4个未知量 ρ_1, ρ_4, r_1, r_4，可以用逐步近似法来解。如果小行星的观測时間間隔不大，則含 η 的項很小，可以略去不計。如果无法知道地心距的値，对小行星的情形，可在第一近似中取 $r_1=r_4=2.7$（对彗星可用抛物綫軌道計算），則 $\xi=0.006$, $\eta=0$。

用逐步近似法解出 ρ_1, ρ_4 后，就可以計算軌道根数了，和前面用三次观測的高斯方法相同，不再重述。

本节的公式总結如下：

一、原始数据

$$\left.\begin{array}{l} t_1,\ \alpha_1,\ \delta_1,\ X_1,\ Y_1,\ Z_1, \\ t_2,\ \alpha_2,\ \delta_2,\ X_2,\ Y_2,\ Z_2, \\ t_3,\ \alpha_3,\ \delta_3,\ X_3,\ Y_3,\ Z_3, \\ t_4,\ \alpha_4,\ \delta_4,\ X_4,\ Y_4,\ Z_4. \end{array}\right\} \tag{I}$$

关于这些量的处理可参看 §11 的說明。

二、輔助量

$$\left.\begin{array}{l} a_i=\cos\delta_i\cos\alpha_i, \\ b_i=\cos\delta_i\sin\alpha_i, \\ c_i=\sin\delta_i, \end{array}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{II}$$

驗算式为

$$a_i^2+b_i^2+c_i^2=1,$$

$$a_i-c_i\sin\alpha_i=\cos(\alpha_i+\delta_i),$$

$$b_i+c_i\cos\alpha_i=\sin(\alpha_i+\delta_i).$$

$$\left.\begin{array}{l} 2R_1\cos\theta_1=-2(a_1X_1+b_1Y_1+c_1Z_1), \\ 2R_4\cos\theta_4=-2(a_4X_4+b_4Y_4+c_4Z_4), \\ R_1^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2, \\ R_4^2=X_4^2+Y_4^2+Z_4^2. \end{array}\right\} \tag{III}$$

驗算式为

$$(X_1-a_1)^2+(Y_1-b_1)^2+(Z_1-c_1)^2=R_1^2+2R_1\cos\theta_1+1,$$

$$(X_4-a_4)^2+(Y_4-b_4)^2+(Z_4-c_4)^2=R_4^2+2R_4\cos\theta_4+1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1n_1\rho_1-a_2\rho_2+a_4n_4\rho_4=n_1X_1-X_2+n_4X_4, \\ b_1n_1\rho_1-b_2\rho_2+b_4n_4\rho_4=n_1Y_1-Y_2+n_4Y_4, \\ c_1n_1\rho_1-c_2\rho_2+c_4n_4\rho_4=n_1Z_1-Z_2+n_4Z_4, \\ a_1n_1'\rho_1-a_3\rho_3+a_4n_4'\rho_4=n_1'X_1-X_3+n_4'X_4, \\ b_1n_1'\rho_1-b_3\rho_3+b_4n_4'\rho_4=n_1'Y_1-Y_3+n_4'Y_4, \\ c_1n_1'\rho_1-c_3\rho_3+c_4n_4'\rho_4=n_1'Z_1-Z_3+n_4'Z_4. \end{array}\right\} \tag{IV}$$

在上面 6 个式子中分为两組(分別含 ρ_2 和 ρ_3)，可在每組中选两个方程来消去 ρ_2 和 ρ_3。所选的方程要 ρ_1 和 ρ_4 的系数相差較

大才好。一般說来是选每組的前两个方程。消去結果得到两式

$$
\left.\begin{aligned}
\rho_4 &= A\,\frac{n_1}{n_4}\,\rho_1 + B\,\frac{n_1}{n_4} + C\,\frac{1}{n_4} + D,\\
\rho_4 &= A'\,\frac{n_1'}{n_4'}\,\rho_1 + B'\,\frac{n_1'}{n_4'} + C'\,\frac{1}{n_4'} + D',
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(V)}
$$

其中 $A, B, \cdots, D'$ 均为已知数值。并計算

$$
\tau_1 = k(t_4 - t_2),\quad \tau_2 = k(t_4 - t_1),\quad \tau_4 = k(t_2 - t_1),
$$

$$
\tau_1' = k(t_4 - t_3),\quad k = 0.01720210,\quad \tau_4' = k(t_3 - t_1).
$$

驗算式
$$
\tau_2 = \tau_1 + \tau_4 = \tau_1' + \tau_4'.
$$

$$
\left.\begin{aligned}
E &= \frac{\tau_1}{\tau_4}, & E' &= \frac{\tau_1'}{\tau_4'},\\
F &= \frac{4}{3}\,\tau_1\tau_2, & F' &= \frac{4}{3}\,\tau_1'\tau_2',\\
G &= AE, & G' &= A'E',\\
H &= F(A-G), & H' &= F'(A'-G'),\\
I &= 4\tau_1^2 A, & I' &= 4\tau_1'^2 A',\\
K &= E(B+C)+C+D, & K' &= E'(B'+C')+C'+D',\\
L &= F(B-C-D-K), & L' &= F'(B'-C'-D'-K'),\\
M &= 4(\tau_1^2 B + \tau_1\tau_4 C), & M' &= 4(\tau_1'^2 B' + \tau_1'\tau_4' C').
\end{aligned}\right\}\text{(VI)}
$$

在小行星情形中，如时間間隔和軌道偏心率都不大，可不必計算 I, I', M, M' 各量。

驗算式

$$
G + H = A(E+F) - FG,\qquad G' + H' = A'(E'+F') - F'G',
$$

$$
AM - BI = 4AC\tau_1\tau_4,\qquad A'M' - B'I' = 4A'C'\tau_1'\tau_4',
$$

$$
L = F[B(1-E) - C(2+E)],
$$

$$
L' = F'[B'(1-E') - C'(2+E')].
$$

用这些式子来作驗算是足够了。如果再由第二人来計算一遍(VI)式的各量也好。

三、决定地心距

$$\xi=\frac{1}{(r_1+r_4)^3}, \qquad \eta=\frac{r_4-r_1}{r_1+r_4}. \tag{VII}$$

$$\left.\begin{aligned} &P=G+H\xi+I\xi\eta, && P'=G'+H'\xi+I'\xi\eta,\\ &Q=K+L\xi+M\xi\eta, && Q'=K'+L'\xi+M'\xi\eta,\\ &\rho_1=\frac{Q'-Q}{P-P'}, && \rho_4=P\rho_1+Q=P'\rho_1+Q'. \end{aligned}\right\} \tag{VIII}$$

在小行星的情形中，如时間間隔和軌道偏心率不太大，可不必計算 η.

$$\left.\begin{aligned} r_1^2&=R_1^2+2R_1\cos\theta_1\rho_1+\rho_1^2,\\ r_4^2&=R_4^2+2R_4\cos\theta_4\rho_4+\rho_4^2. \end{aligned}\right\} \tag{IX}$$

如已知初軌，可采用現成的向徑值来算 ξ, η. 对于第一次計算的小行星軌道，則先取 $\xi=0.006$, $\eta=0$. 由(VIII)式算出 ρ_1, ρ_4, 再由(IX)式計算 r_1, r_4; 再由(VII)式求出 ξ, η; 如此重复計算，得出准确值。

四、軌道根数的求出

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a_1\rho_1-X_1, & x_4&=a_4\rho_4-X_4,\\ y_1&=b_1\rho_1-Y_1, & y_4&=b_4\rho_4-Y_4,\\ z_1&=c_1\rho_1-Z_1, & z_4&=c_4\rho_4-Z_4. \end{aligned}\right\} \tag{X}$$

驗算式

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=r_1^2, \qquad x_4^2+y_4^2+z_4^2=r_4^2.$$

如考慮到光行差，則

$$\left.\begin{aligned} &t_1^0=t_1-A\rho_1, \quad t_4^0=t_4-A\rho_4, \quad A=0^d\!.005772,\\ &\tau_2^0=k(t_4^0-t_1^0),\\ &k_2^2=2(r_1r_4+x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4),\\ &h_2=\frac{\tau_2^2}{k_2^2\left(\frac{k_2}{3}+\frac{r_1+r_4}{2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{XI}$$

y_2 的值可查表或由下式計算：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\bar{y}_2 = 1 + \frac{10}{11}\cfrac{\frac{11}{9}h_2}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h_2}{1+\cfrac{\frac{11}{9}h_2}{\cdots\cdots}}} \\
&\frac{11}{9} = 1.222222, \qquad \frac{10}{11} = 0.909091.
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(XII)}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{x_1x_4 + y_1y_4 + z_1z_4}{r_1^2}, \\
x_0 &= x_4 - \sigma x_1, \\
y_0 &= y_4 - \sigma y_1, \\
z_0 &= z_4 - \sigma z_1, \\
r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(XIII)}
$$

驗算式

$$(r_1r_0)^2 = (y_1z_4 - z_1y_4)^2 + (z_1x_4 - x_1z_4)^2 + (x_1y_4 - y_1x_4)^2.$$

$$\sin(f_4 - f_1) = \frac{r_0}{r_4},$$

$$\cos(f_4 - f_1) = \frac{\sigma r_1}{r_4} = \frac{x_1x_4 + y_1y_4 + z_1z_4}{r_1r_4}.$$

正弦和余弦所得的角应相同，这就可用来驗算。

$$\sqrt{p} = \frac{r_1r_0}{\tau_2}\bar{y}_2, \qquad \text{(XIV)}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&q_1 = \frac{p}{r_1} - 1, \qquad q_4 = \frac{p}{r_4} - 1, \\
&e\cos f_1 = q_1, \\
&e\sin f_1 = \frac{q_1\cos(f_4 - f_1) - q_4}{\sin(f_4 - f_1)}, \\
&f_4 = f_1 + (f_4 - f_1).
\end{aligned}
\right\} \qquad \text{(XV)}
$$

驗算式 $\qquad e\cos f_4 = q_4,$

$$e = \sin\varphi, \qquad a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1&=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}f_1\\&=\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}f_1,\\\operatorname{tg}\frac{1}{2}E_4&=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}f_4\\&=\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}f_4.\end{aligned}\right\}\quad(\text{XVI})$$

驗算式

$$a\cos\varphi\sin\frac{1}{2}(E_4-E_1)=\sqrt{r_1r_4}\sin\frac{1}{2}(f_4-f_1);$$

$$\left.\begin{aligned}&e''=206264.8e,\qquad e^0=57.29578e,\\&M_1=E_1-e\sin E_1,\quad M_4=E_4-e\sin E_4,\\&n=\frac{M_4-M_1}{t_4^0-t_1^0}=\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}},\\&k''=3548.188,\qquad k^0=0.985608.\end{aligned}\right\}\quad(\text{XVII})$$

$$\left.\begin{aligned}&M_0=M_1+n(t_0-t_1^0)=M_4+n(t_0-t_4^0);\\&P_x=x_1\frac{\cos f_1}{r_1}-x_0\frac{\sin f_1}{r_0},\\&Q_x=x_1\frac{\sin f_1}{r_1}+x_0\frac{\cos f_1}{r_0},\\&P_y=y_1\frac{\cos f_1}{r_1}-y_0\frac{\sin f_1}{r_0},\\&Q_y=y_1\frac{\sin f_1}{r_1}+y_0\frac{\cos f_1}{r_0},\\&P_z=z_1\frac{\cos f_1}{r_1}-z_0\frac{\sin f_1}{r_0},\\&Q_z=z_1\frac{\sin f_1}{r_1}+z_0\frac{\cos f_1}{r_0};\\&A_x=aP_x,\qquad A_y=aP_y,\qquad A_z=aP_z,\\&B_x=aQ_x\cos\varphi,\ B_y=aQ_y\cos\varphi,\ B_z=aQ_z\cos\varphi.\end{aligned}\right\}\quad(\text{XVIII})$$

驗算式

$$A_x^2+A_y^2+A_z^2=a^2,$$

$$B_x^2+B_y^2+B_z^2=a^2\cos^2\varphi,$$

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin i\sin\omega=P_z\cos\varepsilon-P_y\sin\varepsilon,\\
&\sin i\cos\omega=Q_z\cos\varepsilon-Q_y\sin\varepsilon,\\
&\sin\Omega=(P_y\cos\omega-Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon,\\
&\cos\Omega=P_x\cos\omega-Q_x\sin\omega,\\
&\cos i=-(P_x\sin\omega+Q_x\cos\omega)\csc\Omega.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(XIX)}$$

其中由 $\sin i$, $\cos i$, $\sin\Omega$, $\cos\Omega$ 所得的 i 和 Ω 应該相同，这就是驗算。

五、同观測比較 观測时刻为

$$t^0=t-A\rho,$$

式中 $A\rho$ 可由 $A\rho_1$ 和 $A\rho_4$ 用内插法求出。

$$\left.\begin{aligned}
&M=M_0+n(t^0-t_0),\ E-e\sin E=M,\\
&\rho\cos\delta\cos\alpha=A_x(\cos E-e)+B_x\sin E+X,\\
&\rho\cos\delta\sin\alpha=A_y(\cos E-e)+B_y\sin E+Y,\\
&\rho\sin\delta=A_z(\cos E-e)+B_z\sin E+Z.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(XX)}$$

这里不再举例，如要参考，可查有关书籍[1]。

§12 用两个观測計算圓形軌道的基本公式

从在时刻 t_1 和 t_2 的观測得到两个方向，通过它們可得出一个圓形軌道。軌道的半徑决定于观测时的地心距 ρ_1 和 ρ_2，但軌道半徑应該使天体所走过的弧满足克普勒定律。利用这个条件可以定出半徑 a. 知道了 a，就不难求出地心距 ρ_1, ρ_2 和天体的日心坐标，然后再来决定其它的軌道根数。

对于时刻 t_1 和 t_2 的观測坐标 α_1, δ_1 和 α_2, δ_2，可令

---

[1] 参看 Дубяго 著：Определение Орбит, p. 168.

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \cos\delta_i \cos\alpha_i, \\ b_i &= \cos\delta_i \sin\alpha_i, \\ c_i &= \sin\delta_i, \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2). \tag{1}$$

然后有

$$\left.\begin{aligned} x_i &= a_i\rho_i - X_i, \\ y_i &= b_i\rho_i - Y_i, \\ z_i &= c_i\rho_i - Z_i, \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2). \tag{2}$$

如果軌道半徑等于 a，則由(2)式可得

$$a^2 = R_i^2 + 2R_i\cos\theta_i\rho_i + \rho_i^2, \tag{3}$$

其中

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2,$$

$$R_i\cos\theta_i = -(a_iX_i + b_iY_i + c_iZ_i). \tag{4}$$

由(3)式解出 ρ_i，得

$$\rho_i = \sqrt{a^2 - R_i^2\sin^2\theta_i} - R_i\cos\theta_i. \tag{5}$$

同椭圓軌道一样，令天体两次位置所夹的日心角为 $f_2 - f_1 = 2v$。对于圓形軌道来說，角度 f 可由軌道上的任一点起算，显然有关系

$$\sin^2 v = \frac{1}{4a^2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]. \tag{6}$$

由此可知 $2a\sin v$ 为連接天体两位置的弦长。

此外，上述方程应适合克普勒第二定律。由于圓形軌道是均匀运动，故有

$$2v = n(t_2 - t_1) = ka^{-\frac{3}{2}}(t_2 - t_1). \tag{7}$$

問題在于选擇 a，它应該适合方程 (2)，(3)，(6)，(7)。它們除 a 外还包含了 9 个未知量，其中 6 个量是坐标，2 个是地心距，还有一个是弧长 v。

如已求出 a，則可求得

$$n = ka^{-\frac{3}{2}} = \frac{2v}{(t_2 - t_1)} \tag{8}$$

和日心赤道直角坐标(由(2))。

至于求軌道的定向根数,即(Ω, i, ω),由于f的起点为任意,可以取天体的两觀测位置中点作为起点,則有

$$f_1 = -v, \ f_2 = v.$$

根据二体問題的公式,在此情形下为

$$x_1 = aP_x \cos v - aQ_x \sin v, \qquad x_2 = aP_x \cos v + aQ_x \sin v,$$
$$y_1 = aP_y \cos v - aQ_y \sin v, \qquad y_2 = aP_y \cos v + aQ_y \sin v,$$
$$z_1 = aP_z \cos v - aQ_z \sin v, \qquad z_2 = aP_z \cos v + aQ_z \sin v.$$

解出得

$$\left.\begin{aligned} aP_x &= \frac{1}{2}(x_1+x_2)\sec v, & aQ_x &= \frac{1}{2}(x_2-x_1)\csc v, \\ aP_y &= \frac{1}{2}(y_1+y_2)\sec v, & aQ_y &= \frac{1}{2}(x_2-x_1)\csc v, \\ aP_z &= \frac{1}{2}(z_1+z_2)\sec v, & aQ_z &= \frac{1}{2}(x_2-x_1)\csc v. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

对于一般情形,

$$\left.\begin{aligned} x &= aP_x \cos f + aQ_x \sin f, \\ y &= aP_y \cos f + aQ_y \sin f, \\ z &= aP_z \cos f + aQ_z \sin f, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中

$$f = n(t-t_0), \qquad t_0 = \frac{1}{2}(t_1+t_2).$$

本节的公式总結如下:

一、原始数据

$$\left.\begin{aligned} &t_1, \alpha_1, \delta_1, X_1, Y_1, Z_1, \\ &t_2, \alpha_2, \delta_2, X_2, Y_2, Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

$\alpha_i, \delta_i, X_i, Y_i, Z_i$ 应对应于同一春分点。計算时只需取五位甚至四位小数,故光行差和視差都可以略去。

二、不变的量

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \cos\delta_i\cos\alpha_i, \\ b_i &= \cos\delta_i\sin\alpha_i, \\ c_i &= \sin\delta_i, \end{aligned}\right\}\quad (i=1,\ 2). \tag{II}$$

驗算式 $a_i^2+b_i^2+c_i^2=1$,

$$\left.\begin{aligned} &a_i-c_i\sin\alpha_i=\cos(\alpha_i+\delta_i), \\ &b_i+c_i\cos\alpha_i=\sin(\alpha_i+\delta_i); \\ &R_i\cos\theta_i=-(a_iX_i+b_iY_i+c_iZ_i), \\ &R_i^2=X_i^2+Y_i^2+Z_i^2, \\ &(R_i\sin\theta_i)^2=R_i^2-(R_i\cos\theta_i)^2. \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

三、求軌道半徑

$$\left.\begin{aligned} \rho_i &= \sqrt{a^2-R_i^2\sin^2\theta_i}-R_i\cos\theta_i, \\ x_i &= a_i\rho_i-X_i, \\ y_i &= b_i\rho_i-Y_i, \\ z_i &= c_i\rho_i-Z_i. \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 v_g &= \frac{1}{4a^2}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right], \\ v_d &= \frac{1}{2}k(t_2-t_1)a^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{V}$$

如果 a 是准确的値，上面的 v_g 和 v_d 应該相等。但是 a 的値并不知道。在小行星的情形中，第一次近似时令 $a=2.7$, $a^2=7.29$, $a\sqrt{a}=4.43655$，在第二次近似中根据 v_d-v_g 的値来决定 a 应增大或減小 0.2～0.3. 以后的近似可用內插法，直到 $v_d-v_g=0$ 时为止。

四、根数的求出

$$\left.\begin{aligned} &n=ka^{-\frac{3}{2}}=\frac{2v}{t_2-t_1}, \\ &k^0=0.98561,\qquad k''=3548.19. \end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= a_i\rho_i-X_i, \\ y_i &= b_i\rho_i-Y_i, \\ z_i &= c_i\rho_i-Z_i. \end{aligned}\right\} \tag{VII}$$

驗算式　　$x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2=a^2.$

$$\left.\begin{aligned}
A_x=aP_x&=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\sec v,\\
B_x=aQ_x&=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\csc v,\\
A_y=aP_y&=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\sec v,\\
B_y=aQ_y&=\frac{1}{2}(y_2-y_1)\csc v,\\
A_z=aP_z&=\frac{1}{2}(z_1+z_2)\sec v,\\
B_z=aQ_z&=\frac{1}{2}(z_2-z_1)\csc v.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(VIII)}$$

驗算式　　$A_x^2+A_y^2+A_z^2=a^2=B_x^2+B_y^2+B_z^2,$

$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0.$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin i\sin\omega=P_z\cos\varepsilon-P_y\sin\varepsilon,\\
&\sin i\cos\omega=Q_z\cos\varepsilon-Q_y\sin\varepsilon,\\
&\sin\Omega=(P_y\cos\omega-Q_y\sin\omega)\sec\varepsilon,\\
&\cos\Omega=P_x\cos\omega-Q_x\sin\omega,\\
&\cos i=-(P_x\sin\omega+Q_x\cos\omega)\csc\Omega,\\
&\omega=u_0.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IX)}$$

五、同观測值比較

$$\left.\begin{aligned}
&t_0=\frac{1}{2}(t_1+t_2),\qquad f=n(t-t_0),\\
&\rho\cos\delta\cos\alpha=A_x\cos f+B_x\sin f+X,\\
&\rho\cos\delta\sin\alpha=A_y\cos f+B_y\sin f+Y,\\
&\rho\sin\delta=A_z\cos f+B_z\sin f+Z.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(X)}$$

§13　計算拋物綫軌道的原理

彗星的軌道有很多种，大部分接近于拋物綫。但也有些周期

彗星的軌道是很扁的椭圓，还有个别彗星軌道接近于圓形。

彗星在近日点附近时运动得很快，而且亮度和形状又常在变化。新发现的彗星大都在近日点附近，如果沒有星历表就很难观测，因此，有必要計算彗星的初軌和星历表。

由于彗星軌道絕大部分是拋物綫或近于拋物綫的椭圓，故第一次近似軌道都认为是拋物綫。

因为拋物綫的偏心率等于1，故拋物綫軌道只有5个軌道根数。这个条件反映在彗星的两个向徑和联結它們的弦之間的关系上。一方面是彗星由第一个位置走到第二个位置所需时間的关系；另一方面就是前面（第二章，§4）讲过的欧拉方程。如果有彗星的三个观测，就可以得到第一和第三观测的地心距之間的一个关系。

第二个方程是奥耳白尔得到的，他从平面方程中消去第二次观测的地心距得出。从上述的方程不能直接解出 ρ_1 和 ρ_3，只能用逐步近似法。最后知道了日心坐标再定出軌道根数。我們可以看出，观测坐标不能全部用到。因为观测数据有6个，而只需要求出5个軌道根数。第二个观测只給出了一个条件，而不是两个。此外，計算方法与椭圓軌道有原則区別：椭圓軌道中有两个参变量 n_1 和 n_3，在这里只有一个，即第一和第三地心距之比。

§14 奥耳白尔方程

为方便起見，所用的記号基本上与椭圓軌道計算相同。观测时刻用 t_i $(i=1, 2, 3)$ 表示；彗星的观测坐标用 α_i 和 δ_i，太阳坐标用 X_i, Y_i, Z_i 来表示，故前面的几个方程与(3-4-8)，(3-4-9)，(3-4-10)式相同，即

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \cos\delta_i\cos\alpha_i, \\ b_i &= \cos\delta_i\sin\alpha_i, \\ c_i &= \sin\delta_i; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= a_i\rho_i - X_i, \\ y_i &= b_i\rho_i - Y_i, \\ z_i &= c_i\rho_i - Z_i; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1n_1\rho_1 - a_2\rho_2 + a_3n_3\rho_3 &= n_1X_1 - X_2 + n_3X_3, \\ b_1n_1\rho_1 - b_2\rho_2 + b_3n_3\rho_3 &= n_1Y_1 - Y_2 + n_3Y_3, \\ c_1n_1\rho_1 - c_2\rho_2 + c_3n_3\rho_3 &= n_1Z_1 - Z_2 + n_3Z_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

消去 ρ_2 可得到 ρ_1 和 ρ_3 的两个方程。消去的方法很多，例如，可以任意选擇三个因子 A, B, C 滿足条件：

$$Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 = 0. \tag{4}$$

用 A, B, C 分别乘上(3)式的三个式后，相加即得所需的結果。

引入記号

$$\left.\begin{aligned} Aa_i + Bb_i + Cc_i &= \mathfrak{A}_i \quad (i=1, 3), \\ AX_i + BY_i + CZ_i &= \odot_i \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

故利用(4)，(5)式可把(3)式化为

$$\mathfrak{A}_1 n_1\rho_1 + \mathfrak{A}_3 n_3\rho_3 = n_1\odot_1 - \odot_2 + n_3\odot_3. \tag{6}$$

后面还可以得出 A, B, C 的另外一个条件。事实上，把 A, B, C 乘上同一因子，(6)式仍然不变．由(6)式可得奥耳白尔方程

$$\rho_3 = M\rho_1 + m, \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} M &= -\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_3}\frac{n_1}{n_3}, \\ m &= \frac{1}{\mathfrak{A}_3}\left(\odot_1\frac{n_1}{n_3} - \odot_2\frac{1}{n_3} + \odot_3\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

在这些方程中，包含有三角形面积之比，可以只取它們的近似值。最好是利用(3–11–12)式，并以(3–11–11)式代入，把其中的脚数 4 换成 3，則得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{n_1}{n_3} &= \frac{\tau_1}{\tau_3} + \frac{4}{3}\,\frac{\tau_1\tau_2(\tau_3-\tau_1)}{\tau_3(r_1+r_3)^3} + 4\tau_1^2\,\frac{r_3-r_1}{(r_1+r_3)^4}, \\
\frac{1}{n_3} &= \frac{\tau_2}{\tau_3} - \frac{4}{3}\,\frac{\tau_1\tau_2(\tau_2+\tau_3)}{\tau_3(r_1+r_3)^3} + 4\tau_1\tau_2\,\frac{r_3-r_1}{(r_1+r_3)^4}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

其中

$$
\tau_1 = k(t_3-t_2), \quad \tau_2 = k(t_3-t_1), \quad \tau_3 = k(t_2-t_1). \tag{10}
$$

如果向徑不是很小，(9)式的最后一項不重要；在一般情形中，r_3-r_1 也很小，可以略去。要軌道計算准确，就必須 M，m 准确才行，也就是要 $\frac{♂_1}{♂_3}$，$\frac{1}{♂_3}$，$\frac{n_1}{n_3}$ 和 $\frac{1}{n_3}$ 很准确。現在先来討論 $\frac{♂_1}{♂_3}$ 和 $\frac{1}{♂_3}$。可以把 A, B, C 看成某个向量的三个分量，按照(4)式，这个向量应該指向通过彗星第二观測位置的一个大圓的极。这个大圓的选擇非常重要，在抛物綫軌道的計算中占很重要的地位，故称它为“基本圓”。

在图 19 中，K_1, K_2, K_3 表示彗星的三个視位置；P 为基本圓的极；L_1, L_2, L_3 为地球的日心位置(即太阳的地心位置反向)。如用大圓联接 PK_1 和 PK_3，則 $♂_1$ 和 $♂_3$ 应該同 PK_1 和 PK_3 的余弦成比例，或同 K_1 和 K_3 向基本圓所作的球面垂綫 K_1Q_1 和 K_3Q_3 的正弦成比例。同样，$⊙_1$, $⊙_2$, $⊙_3$ 应該同垂綫 L_1M_1, L_2M_2, L_3M_3 的正弦成比例。

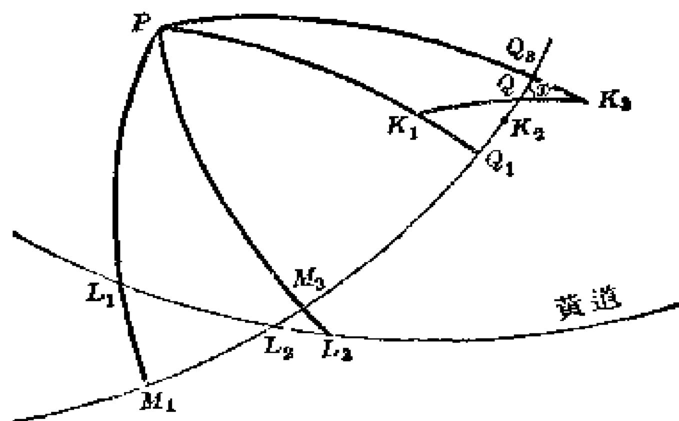


图 19

由于还要定出限制 A, B, C 的第二个条件，即 (4) 的附加条件，我們可以选擇基本圓，使得求 M 和 m 时最有利。显然，这种情形正是 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_3$ 达到最大値的时候。

容易看出，在那种情形下，P 点应同 K_1 和 K_3 在同一个大圓上，而基本圓就垂直于这个大圓。显然基本圓不能靠近 K_1 和 K_3，因为在此时，M 就会出現不准确的因子 $\frac{\mathscr{D}_1}{\mathscr{D}_3}$，而 m 会出現有大因子 $\frac{1}{\mathscr{D}_3}$。

至于量 n_1 和 n_3，它們同計算橢圓軌道一样，可以在逐步近似过程中准确到所需要的精确度，但在这里更困难些。最好是簡化这种过程，使得有可能一下子就能找到 n_1 和 n_3 的足够准确的値。在計算彗星初軌的情况下，观測之間的时間間隔常常很小，因此在第一次近似中，τ_1 和 τ_3 为小量。一般情形下，彗星在天空的位移和弧 K_1Q_1，K_3Q_3 都是小量（設彗星不是很接近地球）。

略去(9)式中最末一項，如果准确到三阶小量，則 $\frac{n_1}{n_3}$ 可換为 $\frac{\tau_1}{\tau_3}$（在 $\tau_1 \neq \tau_3$ 的情形下）。如果 τ_1 接近于 τ_3，則誤差为二阶小量，但在一切情况下都不大。在 m 的分母中有 $\mathscr{D}_3$ 的一次量，m 的誤差就决定于括弧中的因子 $\frac{1}{n_3}$ 的誤差。如果取 $\frac{1}{n_3}=\frac{\tau_2}{\tau_3}$，則 m 的誤差为一阶，而且在任何时間間隔的情况下都存在。然而由于基本圓可任意选擇，我們完全可以在 ρ_3 的方程中把 m 除掉，就是把(4)式的附加条件設为

$$\odot_2 = AX_2 + BY_2 + CZ_2 = 0. \tag{11}$$

在这情况下，基本圓經过太阳的第二个地心位置（或地球的第二个日心位置），此时 m 的式子成为

$$m = -\frac{1}{\mathscr{D}_3}\left(\odot_1 \frac{n_1}{n_3} + \odot_3\right). \tag{12}$$

我們再回到(7)式，它对于在黄道面上运动的任何天体都应該

满足，地球也不例外。这样一来，可以令 $\rho_1=\rho_3=0$，由(7)，(12)式得

$$0=-\frac{1}{☄_3}\left(\odot_1\frac{N_1}{N_3}+\odot_3\right).$$

其中 N_1，N_3 为地球向徑在观测时間内所扫过的面积之比。用(12)式减它得

$$m=\frac{\odot_1}{☄_3}\left(\frac{n_1}{n_3}-\frac{N_1}{N_3}\right).$$

如再把(9)式应用到地球运动，則有

$$m=\frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_3}(\tau_3-\tau_1)\left[\frac{1}{(r_1+r_3)^3}-\frac{1}{(R_1+R_3)^3}\right]\frac{\odot_1}{☄_3}. \quad (13)$$

此式对于求 m 特别方便，而且可以知道 $\odot_1$ 和 $☄_3$ 同一数量級，故 m 就成了二級小量，并且在 $\tau_1=\tau_3$ 时等于 0。如果在第一次近似中取

$$M=\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{☄_1}{☄_3}, \quad (14)$$

即去掉二阶小量，則可丢掉 m，(7)式可写为

$$\rho_3=M\rho_1. \quad (15)$$

奥耳白尔把基本圓选为經过彗星和太阳的第二个位置的大圓，故称为奥耳白尔圓。剛才作的簡化是很重要的，但是当基本圓很接近于 K_1 和 K_3 时，不能这样簡化。在这样的情况下，需要特别解释。

由于 $☄_1$ 和 $☄_3$ 同球面垂綫 K_1Q_1 和 K_3Q_3 的正弦成比例，即

$$\frac{☄_1}{☄_3}=\frac{\sin K_1Q_1}{\sin K_3Q_3}.$$

由图 19 知

$$\sin K_1Q_1=\sin x\sin K_1Q,$$
$$\sin K_3Q_3=\sin x\sin K_3Q,$$

即
$$\frac{\sin K_1Q_1}{\sin K_3Q_3}=\frac{\sin K_1Q}{\sin K_3Q}.$$
因此得
$$M=-\frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{\mathscr{O}_1}{\mathscr{O}_3}=-\frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{\sin K_1Q}{\sin K_3Q}. \tag{16}$$

此外，我們可以看出，第二次观测在計算軌道过程中仅在(4)式中出現，所以只用到一个条件，即这个观测位置在基本圓上，換句話說，它到基本圓的极为 90°.

用 A, B, C 来表示 $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_3, M$ 和 m. 由(4)式和(11)式得 A, B, C 的关系为
$$\frac{A}{C}=\frac{b_2Z_2-c_2Y_2}{a_2Y_2-b_2X_2}, \qquad \frac{B}{C}=\frac{c_2X_2-a_2Z_2}{a_2Y_2-b_2X_2}.$$
因为 A, B, C 三量都乘同一因子后，并不改变它們的作用，故可簡单地写为
$$\left.\begin{aligned}A&=b_2Z_2-c_2Y_2,\\B&=c_2X_2-a_2Z_2,\\C&=a_2Y_2-b_2X_2.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$
然后
$$M=-\frac{n_1}{n_3}\frac{Aa_1+Bb_1+Cc_1}{Aa_3+Bb_3+Cc_3}, \tag{18}$$
或根据(14)，在第一次近似中可取
$$M=-\frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{Aa_1+Bb_1+Cc_1}{Aa_3+Bb_3+Cc_3}. \tag{19}$$
同样
$$m=\frac{AX_1+BY_1+CZ_1}{Aa_3+Bb_3+Cc_3}\left(\frac{n_1}{n_3}-\frac{N_1}{N_3}\right). \tag{20}$$
在第一次近似中令 $m=0$.

§15 欧拉方程

前面只求出了地心距 ρ_1 和 ρ_3 間的一个关系，还要一个关系

才能解，这个关系就是欧拉方程。我們已經在第二章§4中把它推出来了[見(2-4-15)式]。下面只列出不再証明。

設在时刻 t 和 t'，天体在拋物綫軌道上的两位置向徑为 r 和 r'，弦长为 s。若 $\tau=k(t'-t)$，則

$$(r+r'+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} = 6\tau. \tag{1}$$

如果此两位置的眞近点角为 f 及 f'，則当 $f'-f<180°$ 时，(1)式左端取負号，$f'-f>180°$ 时取正号。因为在一般情况下 s 很小，$f'-f<180°$，故(1)式右端是很小量，应用起来不很方便。

朗貝尔得出了它的展开式：

$$\begin{aligned}6\tau &= (r+r')^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{s}{r+r'}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-\frac{s}{r+r'}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \\ &= (r+r')^{\frac{3}{2}}\left[3\frac{s}{r+r'} - \frac{3}{4\cdot6}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^3 \right. \\ &\qquad \left. - \frac{3\cdot1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8\cdot10}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^5 - \cdots\right]\end{aligned} \tag{2}$$

或

$$\begin{aligned}\eta = \frac{2\tau}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} &= \frac{s}{r+r'} - \frac{1}{4\cdot6}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^3 \\ &\quad - \frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8\cdot10}\left(\frac{s}{r+r'}\right)^5 - \cdots.\end{aligned} \tag{3}$$

引入符号 η 是为了簡化，并可求出 $\frac{s}{r+r'}$ 按 η 的展开式。令

$$\frac{s}{r+r'} = \eta + a_3\eta^3 + a_5\eta^5 + \cdots,$$

代入(3)式即得

$$\begin{aligned}\eta = \eta &+ a_3\eta^3 + a_5\eta^5 + \cdots \\ &- \frac{1}{24}\eta^3 - \frac{1}{8}a_3\eta^5 + \cdots \\ &- \frac{1}{128}\eta^5 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

比較两端系数可求出 a_i，故 $\frac{s}{r+r'}$ 的級数成为

$$\frac{s}{r+r'}=\eta+\frac{1}{24}\eta^3+\frac{5}{384}\eta^5+\cdots$$

或

$$s=(r+r')\eta\mu, \tag{4}$$

其中

$$\mu=1+\frac{1}{24}\eta^2+\frac{5}{384}\eta^4+\cdots. \tag{5}$$

可以按 η 为引数造表❶或直接給出 $\mu\eta$ 的表❷。

§16 求地心距

現在的問題是求出 ρ_1，并根据它按照(3-15-15)式求 ρ_3，然后再求向徑和弦代入欧拉方程，結果应同观测时間符合。

利用(3-14-15)式，(3-14-2)式成为

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a_1\rho_1-X_1, & x_3&=a_3M\rho_1-X_3,\\ y_1&=b_1\rho_1-Y_1, & y_3&=b_3M\rho_1-Y_3,\\ z_1&=c_1\rho_1-Z_1, & z_3&=c_3M\rho_1-Z_3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned} r_1^2&=R_1^2+2R_1\cos\theta_1\rho_1+\rho_1^2,\\ r_3^2&=R_3^2+2R_3\cos\theta_3M\rho_1+M^2\rho_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &R_1^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2,\quad R_3^2=X_3^2+Y_3^2+Z_3^2,\\ &2R_1\cos\theta_1=-2(a_1X_1+b_1Y_1+c_1Z_1),\\ &2R_3\cos\theta_3=-2(a_3X_3+b_3Y_3+c_3Z_3). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

又由 $$s^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2,$$

以(1)式代入得

$$s^2=g^2+2gh\cos\chi\rho_1+h^2\rho_1^2. \tag{4}$$

---

❶ 参看 Bauschinger 著：Tafeln zur theoretischen Astronomie.

❷ 参看 Дубяго 著：Определение Орбит，附表 XX、XXI.

其中

$$\left.\begin{aligned} g^2 &= (X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + (Z_1 - Z_3)^2, \\ 2gh\cos\chi &= 2\{(a_3M - a_1)(X_1 - X_3) + (b_3M - b_1) \\ &\quad \times (Y_1 - Y_3) + (c_3M - c_1)(Z_1 - Z_3)\}, \\ h^2 &= (a_3M - a_1)^2 + (b_3M - b_1)^2 + (c_3M - c_1)^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

上面所引出的量都有几何意义，这里不詳細說明。实际上，如果給了 ρ_1 的某个值，由它可以推出 ρ_3, r_1, r_3; 从 (4), (5) 可得出 s. 这是用几何方法所得的值，記为 s_g. 再由 (3–15–3) 式計算 η，查表或直接計算求出 μ 或 $\eta\mu$ 后，可由 (3–15–4) 式又求出 s，这个我們記为 s_d，因为它是欧拉方程中的量，是用力学方法得到的。

就象这样选擇 ρ_1 的値，使得 $s_g = s_d$ 为止。在其中需要某些試驗，巴納赫維奇 (Banachiewicz) 提出了一种找 ρ_1 近似值的方法❶❷，并且还提出計算彗星軌道多重解的問題，在这里不专門介紹。关于多重解的問題，有很多論文在討論。用奧耳白尔方法可能有三重解，但并不是每一个解都符合于观測。对于第二个观測来說，因为它只用了一个条件，就可能有几个解。有时三个解也可能都符合观測。

§ 17 第二次近似和軌道根数的求出

如果观測的时間間隔不大，τ_1 和 τ_3 很接近，而且向徑又不很小，則一般不需要第二次近似。如果这些条件不完全具备，应該继續算下去，改进所求的三角形面积之比的値。

关于光行差的修正，只須改正第一和第三观測就行了，第二次观測用內插法得出。再用它們按照 (3–14–9) 式計算 $\frac{n_1}{n_3}$, $\frac{1}{n_3}$ 的值

---

❶ Banachiewicz: Sur la méthode de Olbers et ses solutions multiples, 載于 **C. R. 166**, p. 122.

❷ Banachiewicz: Über drei Lösungen bei einer parabolischen Bahnbestimmung, 載于 **A. N. 223**, p. 295.

(利用前面所得的 r_1 和 r_3)；用新的 $\frac{n_1}{n_3}$ 和 $\frac{1}{n_3}$ 再按(3-14-8)式計算 M 和 m。这里沒有包含地球公轉运动。于是可得

$$\rho_3 = M\rho_1 + m = \left(M + \frac{m}{\rho_1}\right)\rho_1 = (M)\rho_1.$$

在括号里的 ρ_1 是以前的近似值，上式在形式上和 (3-14-15) 式相同，只是 M 变成了 (M)。再用 (M) 的值根据 (3-16-4)，(3-16-5)式来計算 $2gh\cos\chi$ 和 h^2。有了这些量后，就可以重新求出 ρ_1 和 ρ_3 的值。

如果所討論的彗星不是第一次計算軌道，而已知它的一組不太准的軌道根数，則一开始就可以利用它們算出 ρ_1 和 ρ_3 及 r_1, r_3；以后就可直接用准确公式。至于怎样利用彗星的第二次观測来改进所得的結果，将在后面讲。

求軌道根数的步驟同椭圓軌道計算沒有什么原則区别。

利用所得的 ρ_1, ρ_3, r_1, r_3 按照 (3-9-4)，(3-9-5) 式計算出 σ, x_0, y_0, z_0 和 r_0。并由(3-9-6)式可得

$$\left.\begin{aligned} \sin 2v = \sin(f_3 - f_1) = \frac{r_0}{r_3}, \\ \cos(f_3 - f_1) = \frac{\sigma r_1}{r_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

至于求真近点角可用

$$r_1 = q\sec^2\frac{1}{2}f_1, \qquad r_3 = q\sec^2\frac{1}{2}f_3. \qquad (2)$$

由此得

$$\left.\begin{aligned} &\cos\frac{1}{2}f_1 = \sqrt{\frac{q}{r_1}}, \\ &\cos\frac{1}{2}f_3 = \cos\left(\frac{1}{2}f_1 + v\right) \\ &\qquad = \cos\frac{1}{2}f_1\cos v - \sin\frac{1}{2}f_1\sin v = \sqrt{\frac{q}{r_3}}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

故得

$$\sigma_1 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}f_1 = \operatorname{ctg} v - \frac{\sqrt{\frac{q}{r_3}}}{\cos\frac{1}{2}f_1 \sin v}$$

$$= \operatorname{ctg} v - \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \csc v. \tag{4}$$

由此可以求出 $\frac{1}{2}f_1$. 再由

$$\frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{2}f_1 + v, \qquad \sigma_3 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}f_3, \tag{5}$$

可得

$$q = \frac{r_1}{1+\sigma_1^2} = \frac{r_3}{1+\sigma_3^2}. \tag{6}$$

所以 q 和 f_3 可求出。根据 σ_1, σ_3 按(2–4–7)式

$$\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, q^{-\frac{3}{2}}(t-T) \tag{7}$$

計算出彗星过近日点时刻 T. 用 σ_1 和 σ_3 所得的值应完全相同。

求軌道根数 Ω, ω, i 則与椭圓軌道計算完全一样,不再重述。

§ 18 第二个观测值的表示和軌道的改进

得到了軌道根数后，就可以用它們来得到第二个观測的計算值(如还有其它观測,也将这些値算出)。

由

$$M = \frac{t^0 - T}{q^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

查表❶得到 σ, 再由

$$\left.\begin{aligned}\rho\cos\delta\cos\alpha &= a_x(1-\sigma^2)+b_x\sigma+X,\\ \rho\cos\delta\sin\alpha &= a_y(1-\sigma^2)+b_y\sigma+Y,\\ \rho\sin\delta &= a_z(1-\sigma^2)+b_z\sigma+Z,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

算出 ρ, α, δ. 第二个观測的計算值，不能象椭圓軌道那样，同观

❶ 参看 Дубяго 著: Определение Орбит, 附表 XII.

測准确符合(在計算誤差范圍內),因而产生了偏差。

首先是由于第二个观測在計算軌道过程中只有一个条件在基本圆上,也就是(3-14-4)式。如果計算值同观測值之差 $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ 不超过观測誤差,则所得的結果可以认为符合要求。事实上,如果彗星严格按抛物綫軌道运动,并且观測值本身沒有任何誤差,第二个位置的計算值应与观測值符合。如果两者相差很大(常常是这样的情况),则可能有三个原因:(1)观測有大的錯誤;(2)彗星的实际軌道不是抛物綫;(3)所选用的观測不利于理論上所給的条件。

除此以外,如(3-14-4)式还不符合准确度要求,则除計算誤差外,所采用的值 $\frac{n_1}{n_3}$, $\frac{1}{n_3}$ 也不够准。

为要明确这些原因,并且表示出第二个位置的偏差特性,下面就讲述雅可夫金(Яковкин)有关这方面的工作。

我們认为彗星的第一和第三个位置是固定的,即 α_1, δ_1, α_3, δ_3 不变化。由于第二个位置只有在求 $M=\frac{\rho_1}{\rho_3}$ 时用到,故只要知道了第一和第三观測以及 M 的值,就可以計算軌道,并由它求出第二个位置的計算值。对于所有可能的 M 值計算出的第二个位置在天球上形成一条曲綫,雅可夫金叫它为等置綫。在軌道計算中要利

图 20

用經过它的大圓。如果由于观測誤差，或軌道不是拋物綫，則第二个位置不在等置綫上。在图 20 中，L_1, L_2, L_3 表示地球位置；K_1, K_2, K_3 表示彗星位置；曲綫 $K_1K_2'K_2''K_3$ 就是等置綫。我們就得到一个代替观測位置 K_2 的計算位置 K_2'、卽基本圓和等置綫的交点。如果基本圓同等置綫相交为銳角（图 20），則表示观測位置和計算位置差的弧 K_2K_2' 比較大，这就是說基本圓不利于軌道計算。显然，最好的点是 K_2''，卽在等置綫上离 K_2 最近的点，而且弧 K_2K_2'' 垂直于等置綫。

在具体情况下，不容易得到等置綫的准确表示，最簡單的办法是改变 M 的值进行試驗，确定 M 的最佳值。現在叙述如下。

除所得的軌道外，再选另外的一組軌道根数；它們的原始資料除 M 外都相同（M 只相差 0.001 的数量級）。令 $M=M_1$ 时所得到的第二位置的計算值同观測值之差为 $\Delta\alpha'$, $\Delta\delta'$, $M=M_2$ 时相应的差为 $\Delta\alpha''$, $\Delta\delta''$. 我們认为 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 的变化同 M 的变化为綫性关系，則最佳值 $M=M_1+x$ 由下式决定：

$$\cos\delta(\Delta\alpha'-\Delta\alpha'')\frac{x}{M_2-M_1}=\cos\delta\,\Delta\alpha',$$

$$(\Delta\delta'-\Delta\delta'')\frac{x}{M_2-M_1}=\Delta\delta'.$$

用最小二乘法解这两个方程得

$$\frac{x}{M_2-M_1}=\frac{\cos^2\delta\,\Delta\alpha'(\Delta\alpha'-\Delta\alpha'')+\Delta\delta'(\Delta\delta'-\Delta\delta'')}{\cos^2\delta(\Delta\alpha'-\Delta\alpha'')^2+(\Delta\delta'-\Delta\delta'')^2}. \tag{3}$$

由此解出 x. 現在就用 $M=M_1+x$ 来計算軌道，得到的第二个位置計算值卽图 20 中的 K_2''. 当然，这是在綫性变化的条件下得到的，在拋物綫軌道的假定下，不可能得到比这个更好的結果了。

如果所得的結果还不好，計算值同观測值还相差很大，則只可能是观測誤差太大，或彗星軌道不是拋物綫，要用另外的观測重新

計算軌道。

雅可夫金完成了等置綫形状的分析：如果彗星在天球上同太阳的距离小于 90°，則等置綫就同图 20 上所繪的相似。除此之外，在某些情形下，等置綫可能还有一个孤立的椭圓形曲綫，它是由基本曲綫退化而成的。奥耳白尔方法中解的个数决定于基本圓同等置綫交点的数目，因为所有这些交点都滿足問題的条件。所以，正如图 20 所示，可能有一个解或三个解。如基本圓又同孤立的椭圓形曲綫相交，就产生三个解的情形。在三个解的情形中，每个解所得的第二位置計算値不同，如果不是代表实际軌道，計算値就同观測相差很大。但也可能三个値都同观測相差很小，当然，这是很少有的情况。

雅可夫金定义的基本圓与奥耳白尔不同，不是經过太阳第二位置的大圓，而是与它垂直的。这样得到了一个有趣的結果：可以有五个解。它們的近日点同太阳都很接近。

§19 抛物綫軌道計算中的例外情形

前面已經讲过，当基本圓与第一和第三位置很近时，不容易定准 $\frac{\mathscr{O}_1}{\mathscr{O}_3}$ 和 $\frac{1}{\mathscr{O}_3}$，这时就叫抛物綫軌道中的例外情形。

根据上节所讲的雅可夫金的分析，基本圓同等置綫相交成直角时最有利于計算軌道。这个条件是可以实現的。在大多数情况下，等置綫与联結第一和第三位置的大圓相差不多，由此可知它同基本圓的交角接近于直角，并且永远不会是很小的銳角。雅可夫金証明：当彗星接近于太阳时，由于向徑很小，等置綫有一段很复杂，計算它們的軌道一般很难，根据 $\frac{n_1}{n_3}$，$\frac{1}{n_3}$ 的級数展开式来作的分析不够严格。

在实际工作中，选擇 A, B, C 时，可以使得到的 $\mathscr{O}_1$, $\mathscr{O}_3$ 大

些，最可靠是写出(3-14-3)式的数字形式后，选擇一对方程来消去 ρ_2，使得消去 ρ_2 后的式子中，ρ_3 的系数为最大。

用这样的方法得到了(3-14-6)式，系数中除 $\frac{n_1}{n_3}$，$\frac{1}{n_3}$ 外都为具体数字，再除以 ρ_3 的系数得到了(3-14-7)式。其中 $\frac{n_1}{n_3}$，$\frac{1}{n_3}$ 的第一次近似値采用

$$\frac{n_1}{n_3}=\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1},\qquad \frac{1}{n_3}=\frac{t_3-t_1}{t_2-t_1}. \tag{1}$$

此后就得到了 M，m 的値。

彗星向徑可用下式表示：

$$\left.\begin{aligned} r_1^2&=R_1^2+2R_1\cos\theta_1\rho_1+\rho_1^2,\\ r_3^2&=R_3^2+2R_3\cos\theta_3(M\rho_1+m)+(M\rho_1+m)^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

然后

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a_1\rho_1-X_1, & x_3&=a_3M\rho_1+ma_3-X_3,\\ y_1&=b_1\rho_1-Y_1, & y_3&=b_3M\rho_1+mb_3-Y_3,\\ z_1&=c_1\rho_1-Z_1, & z_3&=c_3M\rho_1+mc_3-Z_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

故(3-16-4)式的系数就成为

$$\left.\begin{aligned} g^2&=(a_3m+X_1-X_3)^2+(b_3m+Y_1-Y_3)^2\\ &\quad+(c_3m+Z_1-Z_3)^2,\\ 2gh\cos\chi&=2[(a_3M-a_1)(a_3m+X_1-X_3)\\ &\qquad+(b_3M-b_1)(b_3m+Y_1-Y_3)\\ &\qquad+(c_3M-c_1)(c_3m+Z_1-Z_3)],\\ h^2&=(a_3M-a_1)^2+(b_3M-b_1)^2+(c_3M-c_1)^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

至于以后求 ρ_1 和定軌道根数，都与前面相同，不再重述。

§ 20 抛物綫軌道計算公式总結

一、原始数据

$$\left.\begin{aligned} &t_1,\ \alpha_1,\ \delta_1,\ X_1,\ Y_1,\ Z_1,\\ &t_2,\ \alpha_2,\ \delta_2,\ X_2,\ Y_2,\ Z_2,\\ &t_3,\ \alpha_3,\ \delta_3,\ X_3,\ Y_3,\ Z_3. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

太阳和彗星的坐标应該是对应于同一历元的春分点。如果已經知道了近似軌道根数，应該修正光行差时間，并且对彗星坐标再作視差修正。如果是計算初軌，在需要第二次近似时，則对太阳坐标 X, Y, Z 作坐标修正，否則，可不必修正視差。拋物綫軌道一般只用五位小数，只有很少情形需用六位。

二、求不变化的量

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \cos\delta_i \cos\alpha_i, \\ b_i &= \cos\delta_i \sin\alpha_i, \\ c_i &= \sin\delta_i, \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, 3). \qquad \text{(II)}$$

驗算式

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1,$$

$$a_i - c_i \sin\alpha_i = \cos(\alpha_i + \delta_i),$$

$$b_i + c_i \cos\delta_i = \sin(\alpha_i + \delta_i).$$

$$\left.\begin{aligned} R_1^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \\ R_3^2 &= X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2, \\ 2R_1\cos\theta_1 &= -2(a_1X_1 + b_1Y_1 + c_1Z_1), \\ 2R_3\cos\theta_3 &= -2(a_3X_3 + b_3Y_3 + c_3Z_3). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

驗算式

$$R_1^2 + 2R_1\cos\theta_1 + 1 = (X_1 - a_1)^2 + (Y_1 - b_1)^2 + (Z_1 - c_1)^2,$$

$$R_3^2 + 2R_3\cos\theta_3 + 1 = (X_3 - a_3)^2 + (Y_3 - b_3)^2 + (Z_3 - c_3)^2.$$

三、第一次近似

$$\left.\begin{aligned} A &= b_2Z_2 - c_2Y_2, \\ B &= c_2X_2 - a_2Z_2, \\ C &= a_2Y_2 - b_2X_2. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

驗算式

$$Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 = 0, \quad AX_2 + BY_2 + CZ_2 = 0.$$

$$\left.\begin{aligned}
&M=-\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}\cdot\frac{Aa_1+Bb_1+Cc_1}{Aa_3+Bb_3+Cc_3},\\
&g^2=(X_1-X_3)^2+(Y_1-Y_3)^2+(Z_1-Z_3)^2,\\
&2gh\cos\chi=2[(a_3M-a_1)(X_1-X_3)\\
&\qquad+(b_3M-b_1)(Y_1-Y_3)\\
&\qquad+(c_3M-c_1)(Z_1-Z_3)],\\
&h^2=(a_3M-a_1)^2+(b_3M-b_1)^2+(c_3M-c_1)^2.
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{V}_1)$$

驗算式

$$g^2+2gh\cos\chi+h^2=[(X_1-X_3)+(a_3M-a_1)]^2$$
$$+[(Y_1-Y_3)+(b_3M-b_1)]^2+[(Z_1-Z_3)+(c_3M-c_1)]^2.$$

給 ρ_1 以任一近似值（可以根据彗星在天体上的运动大小由經驗估計），如有了近似軌道，則可根据它算出

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_3=M\rho_1,\\
&r_1^2=R_1^2+2R_1\cos\theta_1\rho_1+\rho_1^2,\\
&r_3^2=R_3^2+2R_3\cos\theta_3\rho_3+\rho_3^2,\\
&s_g^2=g^2+2gh\cos\chi\rho_1+\rho_1^2,\\
&\eta=\frac{2k(t_3-t_1)}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}},\quad s_d=(r_1+r_3)\eta\mu,\ 2k=0.0344042.
\end{aligned}\right\}(\mathrm{VI})$$

其中 μ 由表查出❶。

如 $s_d\neq s_g$，則变化 ρ_1 的值，以后就用内插，直到 $s_g=s_d$ 时为止。

四、例外情形

如果 M 的分子和分母都很小，則由数字方程

$$\left.\begin{aligned}
&a_1n_1\rho_1-a_2\rho_2+a_3\rho_3n_3=n_1X_1-X_2+n_3X_3,\\
&b_1n_1\rho_1-b_2\rho_2+b_3\rho_3n_3=n_1Y_1-Y_2+n_3Y_3,\\
&c_1n_1\rho_1-c_2\rho_2+c_3\rho_3n_3=n_1Z_1-Z_2+n_3Z_3
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{IV}_2)$$

中选两个方程消去 ρ_2，使得 ρ_3 的系数为最大，得

$$☌_1n_1\rho_1+☌_3n_3\rho_3=\odot_1n_1-\odot_2+\odot_3n_3.$$

---

❶ 参看 Дубяго 著：Определение Орбит，附表 XX.

$$M=-\frac{♂_1}{♂_3}\,\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1},$$

$$m=\frac{1}{♂_3}\left(\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}\odot_1-\frac{t_3-t_1}{t_2-t_1}\odot_2+\odot_3\right),$$

$$\rho_3=M\rho_1+m.$$

$$\left.\begin{aligned}
g^2&=(a_3m+X_1-X_3)^2+(b_3m+Y_1-Y_3)^2\\
&\quad+(c_3m+Z_1-Z_3)^2,\\
2gh\cos\chi&=2[(a_3M-a_1)(a_3m+X_1-X_3)\\
&\quad+(b_3M-b_1)(b_3m+Y_1-Y_3)\\
&\quad+(c_3M-c_1)(c_3m+Z_1-Z_3)],\\
h^2&=(a_3M-a_1)^2+(b_3M-b_1)^2+(c_3M-c_1)^2.
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{V}_2)$$

驗算式

$$\begin{aligned}
g^2+2gh\cos\chi+h^2&=(a_3M-a_1+a_3m+X_1-X_3)^2\\
&\quad+(b_3M-b_1+b_3m+Y_1-Y_3)^2\\
&\quad+(c_3M-c_1+c_3m+Z_1-Z_3)^2.
\end{aligned}$$

五、第二次近似

如果观測的时間間隔不大，且接近于相等，而 r_1，r_3 又不很小，一般可不需要第二次近似值。但若需要第二次近似时，則計算

$$t_1^0=t_1-A\rho_1,\quad t_2^0=t_2-A\rho_2,\quad t_3^0=t_3-A\rho_3,\quad A=0^{d}.005772.$$

其中 $A\rho_2$ 由 $A\rho_1$ 和 $A\rho_3$ 内插得出。

$$\tau_1=k(t_3^0-t_2^0),\quad \tau_2=k(t_3^0-t_1^0),\quad \tau_3=k(t_2^0-t_1^0).\qquad(\mathrm{VII})$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{n_1}{n_3}&=\frac{\tau_1}{\tau_3}+\frac{4}{3}\,\frac{\tau_1\tau_2(\tau_3-\tau_1)}{\tau_3(r_1+r_3)^3}+\frac{4\tau_1^2(r_3-r_1)}{(r_1+r_3)^4},\\
\frac{1}{n_3}&=\frac{\tau_2}{\tau_3}-\frac{4}{3}\,\frac{\tau_1\tau_2(\tau_2+\tau_1)}{\tau_3(r_1+r_3)^3}+\frac{4\tau_1\tau_3(r_3-r_1)}{(r_1+r_3)^4}.
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{VIII})$$

$$\left.\begin{aligned}
M&=-\frac{n_1}{n_3}\,\frac{Aa_1+Bb_1+Cc_1}{Aa_3+Bb_3+Cc_3},\\
m&=\frac{1}{Aa_3+Bb_3+Cc_3}\Big\{(AX_1+BY_1+CZ_1)\frac{n_1}{n_3}\\
&\quad+AX_3+BY_3+CZ_3\Big\}.
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{IX})$$

在例外的情形中，M 和 m 的值按第一次近似的公式計算。

$$\rho_3=(M)\rho_1,\ (M)=M+\frac{m}{\rho_1}\quad（\rho_1\ 第一次近似值），$$

然后用(M)代替M，重新計算(V)，(VI)式。

六、軌道根数的求出

$$\rho_3=M\rho_1\ 或\ \rho_3=M\rho_1+m.$$

$$\left.\begin{aligned} x_i&=a_i\rho_i-X_i,\\ y_i&=b_i\rho_i-Y_i,\\ z_i&=c_i\rho_i-Z_i,\\ x_i^2+y_i^2&+z_i^2=r_i^2, \end{aligned}\right\}\quad (i=1,3). \tag{X}$$

r_1 和 r_3 应同前面最后得到的值符合

$$\left.\begin{aligned} \sigma&=\frac{x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3}{r_1^2},\\ x_0&=x_3-\sigma x_1,\\ y_0&=y_3-\sigma y_1,\\ z_0&=z_3-\sigma z_1,\\ r_0^2&=x_0^2+y_0^2+z_0^2,\\ \sin 2v&=\frac{r_0}{r_3}. \end{aligned}\right\} \tag{XI}$$

驗算式

$$\left.\begin{aligned} \cos 2v&=\frac{\sigma r_1}{r_3},\\ \sigma_1&=\operatorname{tg}\frac{1}{2}f_1=\operatorname{ctg}f-\sqrt{\frac{r_1}{r_3}}\csc f_1,\\ \frac{1}{2}f_3&=\frac{1}{2}f_1+v,\\ \sigma_3&=\operatorname{tg}\frac{1}{2}f_3,\\ q&=\frac{r_1}{1+\sigma_1^2}=\frac{r_3}{1+\sigma_3^2}. \end{aligned}\right\} \tag{XII}$$

根据 σ_1,σ_3 算出 M_1，M_3，则得

$$T = t_1^0 - M_1 q^{\frac{3}{2}} = t_3^0 - M_3 q^{\frac{3}{2}}.$$

$$\left.\begin{aligned}
&P_x = x_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - x_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\
&Q_x = x_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + x_0 \frac{\cos f_1}{r_0}, \\
&P_y = y_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - y_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\
&Q_y = y_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + y_0 \frac{\cos f_1}{r_0}, \\
&P_z = z_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - z_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\
&Q_z = z_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + z_0 \frac{\cos f_1}{r_0}; \\
&a_x = qP_x, \quad a_y = qP_y, \quad a_z = qP_z, \\
&b_x = 2qQ_x, \quad b_y = 2qQ_y, \quad b_z = 2qQ_z.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII)}$$

驗算式

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = q^2, \qquad b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 4q^2,$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sin i \sin \omega = P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\
&\sin i \cos \omega = Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon, \\
&\sin \Omega = (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\
&\cos \Omega = P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega, \\
&\cos i = -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \csc \Omega.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}$$

用正弦和余弦求出的 i, Ω, ω 都应相同，这就是驗算。

七、第二个位置的表示

$$M_2 = (t_2^0 - T) q^{-\frac{3}{2}}, \qquad \sigma_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} f_2, \qquad \text{(XV)}$$

其中 σ_2 是从 M_2 为引数查表得出

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_2 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 = Q_x(1 - \sigma_2^2) + b_x \sigma_2 + X_2, \\
&\rho_2 \cos \delta_2 \sin \alpha_2 = Q_y(1 - \sigma_2^2) + b_y \sigma_2 + Y_2, \\
&\rho_2 \sin \delta_2 = Q_z(1 - \sigma_2^2) + b_z \sigma_2 + Z_2.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XVI)}$$

如要作軌道改进，可根据 § 18 去作。

习　　題

1．試根据某天体的观测数据，利用三个观测計算橢圓軌道的方法，計算一次橢圓軌道。

2．試根据某天体的观测数据，利用两个观测計算圓形軌道的方法，計算一次圓形軌道。

3．計算橢圓軌道的基本方程（参看第三章，§ 4）是由公式（3-4-4）中的三个式子出发推导的，但它們都是由（3-4-3）式得来，不是相互独立的，可是后面仍把它們当作三个相互独立的式子来应用，試解釋这个原因。

4．高斯方法中有一个基本思想：同时求两个量的近似值，要比消去一个量后求另外一个量的近似值容易些，試根据軌道計算公式的一个例子（例如解 ρ_2，r_2）来說明。

5．試用微分方程解法直接解出（3-8-14）式，把得到的解再用級数展开，再把展开結果同（3-8-15）式比較。

6．試說明（3-8-20）式中，y 的三次方程中唯一的正根大于 1，而且接近于 1。

7．如果根据观测直接定出了人造地球卫星的运动周期，試列出一种計算圓形軌道根数的最簡单的方法。

8．如果根据观测直接定出了天体的三个軌道根数：a，Ω，i；試列出一种計算橢圓軌道的其它三个根数的最簡单的方法。

9．如果已知某行星在一个时刻的位置和速度分量，即 (x, y, z)，$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$，試求：(1)行星为圓形軌道的根数；(2)行星为橢圓軌道的根数；(3)行星为拋物綫軌道的根数；(4)行星为双曲綫軌道的根数。

第四章　摄动运动方程

在第二、三章中，对二体問題进行了討論，这对于很近似的研究可以应用，但对于准确的討論就不够了，必須考虑摄动。加入摄动以后，要解运动方程就发生了困难，因为它至少是三体問題，而到目前为止，三体問題还不可能全部解出，所以只有采用一些特殊的办法，使能得到較好的近似解。各种不同的办法就形成了不同的摄动理論。在这里我們只介紹摄动理論中最基本的內容，使讀者有一概括的了解。

在这里討論的摄动理論，是以解析力学为基础的，其中有一些內容已在理論力学和天文学教程下册中讲过了，这里只作簡要的敘述。

§1　拉格朗日方程，哈密尔頓方程

考虑一个有 n 个质点的系統，在直角坐标系中，应有 $3n=k$ 个独立的坐标 x_i, y_i, z_i $(i=1, \cdots, n)$。它們的运动方程应为

$$m_i\ddot{x}_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad m_i\ddot{y}_i=\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad m_i\ddot{z}_i=\frac{\partial U}{\partial z_i}\quad (i=1, \cdots, n),\tag{1}$$

其中 U 是 x, y, z 的函数。如果存在下面的关系式，把 k 个坐标表为时間 t 和 k 个独立变量 $q_1, \cdots, q_k$ 的函数

$$\begin{gathered}x_i=x_i(t, q_1, \cdots, q_k),\quad y_i=y_i(t, q_1, \cdots, q_k),\\ z_i=z_i(t, q_1, \cdots, q_k)\quad (i=1, \cdots, n),\end{gathered}\tag{2}$$

这时 $q_1, \cdots, q_k$ 称为广义坐标。

在(2)式的变换下，力函数 U 应变成 $q_1, \cdots, q_k$ 和 t 的函数，簡

記为$U(q, t)$，而n个质点系的总动能$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$将变为$q$, $\dot{q}$和t的函数，写为

$$T=T(q, \dot{q}, t)=T_2+T_1+T_0, \tag{3}$$

其中T_2是$\dot{q}$的二次齐次函数，T_1为$\dot{q}$的一次齐次函数，T_0与$\dot{q}$无关。如果(2)式右方不显含t，則将有$T=T_2$。

引入符号$L=T+U$，根据天文学教程下册中讲过的推导，我們可得到以广义坐标表示的质点的运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \cdots, k). \tag{4}$$

(4)式代替了(1)，这也是k个二阶微分方程，称为拉格朗日方程。

下面我們将(4)式轉化为$2k$个一阶微分方程，使具有更好的形式。首先引入变量p来代替$\dot{q}$

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=p_i(q, \dot{q}, t) \quad (i=1, 2, \cdots, k). \tag{5}$$

p称为广义动量。由(5)式可解出$\dot{q}$为p的函数

$$\dot{q}_i=\dot{q}_i(p, q, t) \quad (i=1, 2, \cdots, k). \tag{6}$$

通过(6)式，动能T将变为q, p和t的函数，記为

$$\begin{aligned}T(q, \dot{q}, T)&=\overline{T}(p, q, t)\\&=\overline{T}_2(p, q, t)+\overline{T}_1(p, q, t)+\overline{T}_0(q, t).\end{aligned}$$

$\overline{T}_2$, $\overline{T}_1$均从(3)式中T_2, T_1轉換而来。这时力函数U因不含$\dot{q}$，所以不变，仍是q, t的函数。

再引入哈密尔顿函数H

$$H(q, p, t)=\overline{T}_2-T_0-U, \tag{7}$$

則它应是q, p和t的函数。根据天文学教程下册中已讲过的推导，我們得到以q, p表示的质点系的运动方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \cdots, k). \tag{8}$$

这是由 $2k$ 个一阶方程組成的。具有这种形式的微分方程在数学中被叫做正則方程，q，p 被称为正則共軛变量。(8)式被称为哈密尔頓正則方程。

如果(2)式右方不显含 t，則 $T=T_2$，$T_0=0$，且 T，U 亦不显含 t，从而 H 亦不显含 t。所以应用(8)式有

$$\dot{H}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=0,$$

即

$$H=T-U=\text{常数}。\tag{9}$$

(9)式就是能量积分。

值得指出的是：虽然上面的結果好象是在 x, y, z 为慣性坐标系的情况下得出的，但实际上在推导过程中幷未用到这一性质，而只要运动方程具有(1)的形式就行了。例如在二体問題中，有这样的运动方程

$$m\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad m\ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad m\ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z},$$

其中

$$U=\frac{\mu M}{r}=G\frac{(M+m)m}{r}.$$

这是在取太阳为坐标原点的坐标系中得到的，由于太阳也在作非慣性运动，所以坐标系显然是非慣性的，但我們仍可用上面的办法得出哈密尔頓正則方程。

§2 哈密尔頓-雅哥比方法

我們現在来叙述哈密尔頓正則方程的一个解法，它被称为哈密尔頓-雅哥比方法。这种方法已在天文学教程下册中詳細的讲过了，因此这里只写出結果。

偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)=0\tag{1}$$

被称为哈密尔顿-雅哥比方程。其中 H 就是哈密尔顿函数，S 是未知函数。H 是 q, p, t 的函数，将 p 以 $\frac{\partial S}{\partial q}$ 置换后就有(1)中的形式。只要求出(1)式的任一个解 $S(q, \alpha, t)$ 为 q, t 的函数并包含 k 个积分常数 α_i，則由方程組

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i=1, 2, \cdots, k) \tag{2}$$

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} = p_i \quad (i=1, 2, \cdots, k) \tag{3}$$

中可解出 q, p 为时間 t 及 $2k$ 个常数 α, β 的函数

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \tag{4}$$

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \tag{5}$$

可以証明(4),(5)即是哈密尔顿正則方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{6}$$

的解。α, β 被称为正則常数。

由此可見，解哈密尔顿正則方程的問題归結为解偏微分方程(1)的問題。但(1)式是 S 的一阶非綫性偏微分方程，一般情况下，求它的特解都是很困难的。然而这个方法在后面推导行星摄动运动方程中，却有很大的用途。

在天文学教程下册中，用黄道球面坐标为广义坐标，作为一个哈密尔顿-雅哥比方法应用的例子，解决了二体問題。求出了正則常数 α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3；它們和軌道根数的关系是

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & \beta_1 &= -\tau, \\ \alpha_2 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)}, & \beta_2 &= \omega, \\ \alpha_3 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, & \beta_3 &= \Omega; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

以及

$$
\left.\begin{aligned}
&a=-\frac{\mu}{2\alpha_1}, && \tau=-\beta_1,\\
&e=\sqrt{1+\frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, && \omega=\beta_2,\\
&i=\cos^{-1}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right), && \Omega=\beta_3.
\end{aligned}\right\}\tag{8}
$$

有时引入历元时刻的平黄經 ε_0 和近日点平黄經 $\tilde{\omega}$ 来代替 τ 和 ω，则得

$$
\beta_1=\frac{1}{n}(\varepsilon_0-\tilde{\omega}),\quad \beta_2=\tilde{\omega}-\Omega,\quad \beta_3=\Omega;\tag{9}
$$

$$
\varepsilon_0=n\beta_1+\beta_2+\beta_3,\ \tilde{\omega}=\beta_2+\beta_3,\ \Omega=\beta_3.\tag{10}
$$

这些关系式将在后面用到。

§3 柏 松 方 法

解哈密尔顿正則方程的另一种方法是柏松 (Poisson) 提出的。方法的内容是利用已知的积分来求未知的积分。

設 U, V 为 q, p, t 的函数，定义函数关系为

$$
\begin{aligned}
\{U, V\}&=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial p_i}-\frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(U, V)}{\partial(q_i, p_i)},
\end{aligned}\tag{1}
$$

它称为函数 U, V 的柏松括弧。由定义显然可以看出它有下列性质：

$$
\left.\begin{aligned}
&1. && \{U, V\}=-\{V, U\},\quad \{U, U\}=0;\\
&2. && \{U, -V\}=\{-U, V\}=-\{U, V\};\\
&3. && \frac{d}{dt}\{U, V\}=\left\{\frac{dU}{dt}, V\right\}+\left\{U, \frac{dV}{dt}\right\};\\
&4. && \{U,\{V, W\}\}+\{V,\{W, U\}\}\\
& && \qquad+\{W,\{U, V\}\}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{2}
$$

性质 4 的証明比較复杂，讀者可作为一个习題，自行証明。

若 $$F(q, p, t)=\text{常数}$$

为正則方程組

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \cdots, k) \tag{3}$$

的一个积分，則有

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=0. \tag{4}$$

以(3)式代入得

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0, \tag{5}$$

亦即

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\{H, F\}. \tag{5'}$$

这說明(5′)式是 $F=$ 常数为方程組(3)的积分的必要条件。反之，若 $F(p, q, t)=$ 常数满足(5′)式，即(5)式成立，而 F 的全微商应为(4)式，由于 F 的全微商的表达式是唯一的，故与(5)式比較即得

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

即 $F(p, q, t)=$ 常数为方程組(3)的一个积分。这就是說，(5′)式是 $F(p, q, t)=$ 常数为方程組(3)的积分的充分必要条件。

利用这一性质，不难証明：若

$$F_1(p, q, t)=\text{常数}, \quad F_2(p, q, t)=\text{常数}$$

为方程組(3)的积分，則 $\{F_1, F_2\}=$ 常数也是它的积分。因为 F_1, F_2 是积分，則有

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}=\{H, F_1\}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t}=\{H, F_2\},$$

故利用(2)式得

$$\frac{\partial\{F_1, F_2\}}{\partial t}=\left\{\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\right\}+\left\{F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\right\}$$
$$=\{\{H, F_1\}, F_2\}+\{F_1, \{H, F_2\}\}$$
$$=-\{F_2, \{H, F_1\}\}-\{F_1, \{F_2, H\}\}$$
$$=\{H, \{F_1, F_2\}\}.$$

此式說明$\{F_1, F_2\}$满足(5′)式，因此是方程組(3)的积分。利用这个关系可以从已知积分来求新的积分。这就是柏松方法。

但是，在天体力学中这种方法不能适用。例如在n体問題中，如以直角坐标x_i, y_i, z_i $(i=1, \cdots, n)$来作广义坐标，则有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)\right]=m_i\dot{x}_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

同样有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}=m_i\dot{y}_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}=m_i\dot{z}_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

这說明可用$m_i\dot{x}_i, m_i\dot{y}_i, m_i\dot{z}_i$ $(i=1, \cdots, n)$表示广义动量，从而写出它們正則形式的运动方程組，我們已經知道，这个方程組已有10个积分，其中3个是面积积分，設为F_1, F_2, F_3，即

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\sum_{i=1}^{n}m_i(y_i\dot{z}_i-z_i\dot{y}_i)=C_1,\\ F_2&=\sum_{i=1}^{n}m_i(z_i\dot{x}_i-x_i\dot{z}_i)=C_2,\\ F_3&=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)=C_3;\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

6个为质量中心运动积分

$$\left.\begin{aligned}F_4&=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{x}_i=\alpha_1, & F_5&=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{y}_i=\beta_1,\\ F_6&=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{z}_i=\gamma_1, & F_7&=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i-\alpha_1t=\alpha_2,\\ F_8&=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i-\beta_1t=\beta_2, & F_9&=\sum_{i=1}^{n}m_iz_i-\gamma_1t=\gamma_2;\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

最后一个为能量积分，設为 F_{10}，即

$$F_{10}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i\dot{x}_i^2+m_i\dot{y}_i^2+m_i\dot{z}_i^2)$$

$$-G\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{m_im_j}{\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}}. \tag{8}$$

实际計算表明，上面的 10 个积分中任意两个的柏松括弧都得不到新的积分。这从下表可以看出：

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
F_1	0	F_3	$-F_2$	0	F_6	$-F_5$	0	F_9	$-F_8$	0
F_2	$-F_3$	0	F_1	$-F_6$	0	F_4	$-F_9$	0	F_7	0
F_3	F_2	$-F_1$	0	F_5	$-F_4$	0	F_8	$-F_7$	0	0
F_4	0	F_6	$-F_5$	0	0	0	M	0	0	0
F_5	$-F_6$	0	F_4	0	0	0	0	M	0	0
F_6	F_5	$-F_4$	0	0	0	0	0	0	M	0
F_7	0	F_9	$-F_8$	$-M$	0	0	0	0	0	F_4
F_8	$-F_9$	0	F_7	0	$-M$	0	0	0	0	F_5
F_9	F_8	$-F_7$	0	0	0	$-M$	0	0	0	F_6
F_{10}	0	0	0	0	0	0	$-F_4$	$-F_5$	$-F_6$	0

其中第 i 行第 j 列上是 $\{F_i,F_j\}$。上表所列的結果都很容易証明，讀者可将此作为习题，自行証明。这里只指出两点：第一，在对 F_7，F_8，F_9 求偏微商时 α_1，β_1，γ_1 不能看为常数，而应将 F_4，F_5，F_6 代入。第二，$F_{10}=T-U$ 就是 n 体系統的总能量，而此时 T 为 $m_i\dot{x}_i$，$m_i\dot{y}_i$，$m_i\dot{z}_i$ 的二次齐次函数，所以 $T=T_2$，$T_0=0$，因此

$$H=T_2-T_0-U=T-U=F_{10},$$

即 F_{10} 就是哈密尔頓函数。从而

$$\{F_{10},\ F_i\}=\{H,\ F_i\}=\frac{\partial F_i}{\partial t}\quad(i=1,\ \cdots,\ 9).$$

由此式极易求得 F_{10} 与其他任一个积分的柏松括弧。

从上面可知，柏松方法并不能得出新的积分，故在天体力学中不常用。不过柏松括弧这个符号及其性质在以后需要用到它。

§4 拉格朗日括弧

若 U, V 为 q, p, t 的函数，則函数

$$[U, V]=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(U, V)}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial U}\frac{\partial p_i}{\partial V}-\frac{\partial q_i}{\partial V}\frac{\partial p_i}{\partial U}\right) \tag{1}$$

定义为 U, V 的拉格朗日括弧。拉格朗日就是运用它来推出行星运动方程的，但推导极为复杂，所以我們不采用它来推导行星运动方程。

下面来推出拉格朗日括弧与柏松括弧的倒数关系。以 q_i, $p_i(i=1, \cdots, \beta)$ 为共軛变量，設 $a_m(m=1, \cdots, 2k)$ 为 q, p, t 的函数，且相互是独立的。我們以 L_{mr} 表示 $[a_m, a_r]$，以 P_{ms} 表示 $\{a_m, a_s\}$，即

$$L_{mr}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial a_m}\frac{\partial p_i}{\partial a_r}-\frac{\partial q_i}{\partial a_r}\frac{\partial p_i}{\partial a_m}\right), \tag{2}$$

$$P_{ms}=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial a_m}{\partial q_j}\frac{\partial a_s}{\partial p_j}-\frac{\partial a_m}{\partial p_j}\frac{\partial a_s}{\partial q_j}\right), \tag{3}$$

其中 m, r, $s=1, 2, \cdots, 2k$.

則

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{2k}L_{mr}P_{ms}=&\sum_i\sum_j\left[\frac{\partial a_s}{\partial p_j}\frac{\partial p_i}{\partial a_r}\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial q_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_j}\right.\\&\left.+\frac{\partial a_s}{\partial q_j}\frac{\partial q_i}{\partial a_r}\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial p_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_j}\right]\\&-\sum_i\sum_j\left[\frac{\partial p_i}{\partial a_r}\frac{\partial a_s}{\partial q_j}\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial q_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_j}\right.\\&\left.+\frac{\partial q_i}{\partial a_r}\frac{\partial a_s}{\partial p_j}\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial p_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_j}\right].\end{aligned} \tag{4}$$

但是
$$\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial q_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_j}=\frac{\partial q_i}{\partial q_j}=1 \quad (\text{当 } i=j),$$

$$\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial q_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_j}=\frac{\partial q_i}{\partial q_j}=0 \quad (\text{当 } i\neq j).$$

同样
$$\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial p_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_j}=1 \quad (\text{当 } i=j),$$
$$\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial p_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_j}=0 \quad (\text{当 } i\neq j),$$
$$\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial q_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial p_j}=\sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial p_i}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial q_j}=0.$$

这是因为 q, p 是独立变量的緣故。將这些式子代入(4)式后得
$$\sum_{m=1}^{2k}L_{mr}P_{ms}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial a_s}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial a_r}+\frac{\partial a_s}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial a_r}\right]=1 \quad (\text{若 } s=r),$$
$$\sum_{m=1}^{2k}L_{mr}P_{ms}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial a_s}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial a_r}+\frac{\partial a_s}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial a_r}\right]=0 \quad (\text{若 } s\neq r).$$

这样,我們就得到
$$\sum_{m=1}^{2k}L_{mr}P_{mr}=1 \quad (r=1,\cdots,2k), \tag{5}$$
$$\sum_{m=1}^{2k}L_{mr}P_{ms}=0 \quad (r,\ s=1,\cdots,2k;\ r\neq s). \tag{6}$$

(5)式共有 $2k$ 个方程,(6)式共有 $2k(2k-1)$ 个,因此上面共有 $4k^2$ 个方程,包含 $4k^2$ 个拉格朗日括弧及 $4k^2$ 个柏松括弧。

如果这 $4k^2$ 个拉格朗日括弧全部已知,则 (5),(6) 可視为 $4k^2$ 个柏松括弧的綫性方程組,可以把它們解出来。

在(5)式中令 $r=1$, 在(6)式中令 $s=1$ 及 $r=2,\cdots,2k$, 則有
$$\left.\begin{aligned}&L_{11}P_{11}+L_{21}P_{21}+\cdots+L_{2k,1}P_{2k,1}=1,\\&L_{12}P_{11}+L_{22}P_{21}+\cdots+L_{2k,2}P_{2k,1}=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&L_{1,2k}P_{11}+L_{2,2k}P_{21}+\cdots+L_{2k,2k}P_{2k,1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

令 Δ 为(7)式的系数行列式,即
$$\Delta=\begin{vmatrix}L_{11}&L_{21}&\cdots&L_{2k,1}\\L_{12}&L_{22}&\cdots&L_{2k,2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\L_{1,2k}&L_{2,2k}&\cdots&L_{2k,2k}\end{vmatrix}, \tag{8}$$

并以 L'_{rs} 表示 Δ 中 L_{sr} 位置的代数余因子。这时(7)式的解为

$$P_{11}=\frac{L'_{11}}{\Delta},\quad P_{21}=\frac{L'_{21}}{\Delta},\quad \cdots,\quad P_{2k,1}=\frac{L'_{2k,1}}{\Delta}.$$

用同样方法在一般情况下可得

$$P_{rs}=\frac{L'_{rs}}{\Delta}. \tag{9}$$

由(5),(6)对于 L, P 的对称性，极易得到利用柏松括弧表示拉格朗日括弧的式子

$$L_{rs}=\frac{P'_{rs}}{\Delta_1}, \tag{10}$$

其中

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & \cdots & P_{2k,1} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{2k,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1,2k} & P_{2,2k} & \cdots & P_{2k,2k} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

并且 P'_{rs} 是 Δ_1 中 P_{sr} 位置的代数余因子。

§5 哈密尔頓-雅哥比方法在摄动理論上的应用原理

在天体力学中，二体問題是完全解决了。由于运动方程加入摄动項，相应的正則方程中的哈密尔頓函数也要改变，这时运动方程就不能全部解出。我們将在有摄动情况下的哈密尔頓函数分为两部分

$$H=H_0+H_1, \tag{1}$$

H_0 为二体問題的哈密尔頓函数，H_1 即因摄动而增加的項。在太阳系中，后者要比前者小得多。

先来解方程組

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H_0}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H_0}{\partial q_i}. \tag{2}$$

这是二体問題，只需解偏微分方程組

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H_0\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q},\ t\right)=0,$$

得出任一解 $S(q,\alpha,t)$，則由

$$\beta_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i},\quad p_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i}\tag{3}$$

解出 q,p 为

$$q_i=q_i(\alpha,\beta,t),\quad p_i=p_i(\alpha,\beta,t),\tag{4}$$

則(4)式应是(2)的解，也就是有

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}=\frac{\partial H_0}{\partial p_i},\qquad \frac{\partial p_i}{\partial t}=-\frac{\partial H_0}{\partial q_i}.\tag{5}$$

这里 q_i,p_i 对时間求导数时认为 α_i,β_i 为常数，为了和后面区别起見，故采用偏微商的符号。

我們的目的不是解出(2)式而是解

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.\tag{6}$$

这里我們用常数变易法，卽假定(6)式的解仍具有(4)的形式，只是其中 α,β 不再是常数而是 t 的待定函数。将(4)式代入(6)式，来求出 α,β 的函数分析表达式。代入后得

$$\dot{q}_i=\frac{\partial q_i}{\partial t}+\sum_r\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial H_0}{\partial p_i}+\frac{\partial H_1}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i=\frac{\partial p_i}{\partial t}+\sum_r\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=\frac{-\partial H}{\partial q_i}=\frac{-\partial H_0}{\partial q_i}-\frac{\partial H_1}{\partial q_i}.$$

应用(5)式，有

$$\sum_r\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=\frac{\partial H_1}{\partial p_i},\tag{7}$$

$$\sum_r\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=-\frac{\partial H_1}{\partial q_i}.\tag{8}$$

这就是 α,β 所滿足的微分方程，但太复杂，为了要简化它，我們提出下面的一条定理，也就是著名的雅哥比倒数关系。它在天文学教程下册中已証明过了，这里不再重复。

定理　若S为k个量$q_1, \cdots, q_k$及k个量$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$的函数，并令

$$p_m = \frac{\partial S}{\partial q_m} \quad (m = 1, 2, \cdots, k), \tag{9}$$

$$\beta_s = \frac{\partial S}{\partial \alpha_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, k), \tag{10}$$

根据(10)式可得q为α，β的函数，代入(9)式后又可得p为α，β的函数；反之α，β也可看为p，q的函数。因而可求出下面的偏微商

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}$$

以及

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \alpha_r}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial q_i}.$$

则这些偏微商有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \beta_r}{\partial q_i}, \quad &\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} = \frac{\partial \alpha_r}{\partial p_i}, \\ &\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} = -\frac{\partial \alpha_r}{\partial q_i}, \quad &\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} = -\frac{\partial \beta_r}{\partial p_i}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

现在就用上面所讲的雅哥比倒数关系来简化(7)，(8)两式。H_1是q，p的函数，因而在q，p有大无关的变分δq，δp时，H_1有相应变分δH_1为

$$\delta H_1 = \sum_i \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \delta q_i \right).$$

将(7)，(8)两式代入并应用雅哥比倒数关系而得

$$\begin{aligned} \delta H_1 = \sum_r \sum_i \Big[&-\left(\frac{\partial \beta_r}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial \beta_r}{\partial q_i} \delta q_i \right) \dot{\alpha}_r \\ &+ \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial \alpha_r}{\partial q_i} \delta q_i \right) \dot{\beta}_r \Big]. \end{aligned} \tag{12}$$

因α，β可视为q，p的函数，所以对于q，p的变分δq，δp有相应的$\delta\alpha$，$\delta\beta$为

$$\left.\begin{aligned}\delta\alpha_r&=\sum_i\left(\frac{\partial\alpha_r}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial\alpha_r}{\partial q_i}\delta q_i\right),\\ \delta\beta_r&=\sum_i\left(\frac{\partial\beta_r}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial\beta_r}{\partial q_i}\delta q_i\right).\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

以(13)式代入(12)式后得

$$\delta H_1=\sum_r(-\dot{\alpha}_r\delta\beta_r+\dot{\beta}_r\delta\alpha_r).\tag{14}$$

在 H_1 中，如果把 q, p 换成 α, β 的函数，则 H_1 就成为 α, β 的函数。因此对于变分 $\delta\alpha_r$, $\delta\beta_r$ 有变分 δH_1 为

$$\delta H_1=\sum_r\left(\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_r}\delta\alpha_r+\frac{\partial H_1}{\partial\beta_r}\delta\beta_r\right).\tag{15}$$

如果(15)式中的 $\delta\alpha$, $\delta\beta$ 也就是对应于 δq, δp 的变分，则(14)，(15)式应相同。由于 $\delta\alpha_r$, $\delta\beta_r$ 为独立的变分，则两式中的 $\delta\alpha_r$, $\delta\beta_r$ 的系数应相等，即得

$$\dot{\alpha}_r=-\frac{\partial H_1}{\partial\beta_r},\quad \dot{\beta}_r=\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_r}.\tag{16}$$

(16)式就是我們所需要的結果。只要解出(16)式，求得 α, β 为 t 的函数，再代入(4)式求出 q, p，則所得的 q, p 就应满足(6)，于是問題全部解决。

在天体力学中摄动运动方程是

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z}.\tag{17}$$

上式也可写成

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r}+R\right)=\frac{\partial}{\partial x}(U_0+R).$$

由于运动方程中已消去行星质量的因子，所以动能也可簡写为 $T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$。这时再以黄道球面坐标为广义坐标，可求出相应的广义动量，而将 U, T 表为它們的函数。这时哈密尔顿函数为

$$H=\bar{T}_2-T_0-U=T-U=T-U_0-R.$$

若令

$$H_0=T-U_0, \quad H_1=-R \tag{18}$$

(H_0 相当于二体問題),可解出而得到正則常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. 利用本节所讲的原理,用常数变易法,将(18)式代入(16)式,則有

$$\dot{\alpha}_r=\frac{\partial R}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r=-\frac{\partial R}{\partial \alpha_r}. \tag{19}$$

这样,摄动問題就变成求解(19)式,其中 R 为摄动函数,解时应把 R 表示成 α, β 的函数。同时我們也看到(19)式也具有正則方程組的形式,α, β 是正則共軛变量,而摄动函数 R 正好是哈密尔頓函数。

最后,我們簡单談一下本节所用方法的几何意义。如果沒有摄动,則正則共軛常数 α, β 为常量,而軌道为圓錐曲綫。我們就考虑軌道为椭圓的情形,这时 α, β 是与椭圓軌道根数一一对应的[見(4-2-7),(4-2-8)两式]。当加入摄动后,可认为解的形式仍是那样,只是 α, β 是变化的,并滿足(19)式。也就是椭圓軌道根数在变化着,它們的变化由摄动函数唯一确定。因此可以认为行星是沿着一个不断变化着的椭圓在运动,在不同的时刻为不同的椭圓。在任一时刻,行星在它瞬时椭圓軌道上的位置和实际軌道上的位置重合,速度矢量也相同,所以这椭圓是位于該时刻的实际軌道的密切平面上,并与实际軌道相切。我們就把这样的椭圓叫做密切椭圓。行星的实际軌道正是所有这些密切椭圓組成的曲綫族的包絡綫。

§6 拉格朗日行星运动方程

在§5中得到的摄动理論基本式子(4-5-19)是采用正則共軛常数作为变量的,应用时不方便,有必要把它們換为椭圓軌道根数。

1. 根据(4-2-8)和(4-2-10)两式，得出 α, β 与椭圆轨道根数 a, e, i, ε_0, $\tilde{\omega}$, Ω 的关系为

$$
\left.\begin{aligned}
&a=-\frac{\mu}{2\alpha_1},\quad \Omega=\beta_3,\quad e^2=1+\frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2},\quad \tilde{\omega}=\beta_1+\beta_2,\\
&\cos i=\frac{\alpha_3}{\alpha_2},\quad \varepsilon_0=n\beta_1+\beta_2+\beta_3=\frac{\beta_1}{\mu}(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}+\beta_2+\beta_3;
\end{aligned}\right\}\quad(1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{a}=\frac{\mu}{2\alpha_1^2}\dot{\alpha}_1=\frac{2a^2}{\mu}\dot{\alpha}_1,\\
&e\dot{e}=\frac{\alpha_2}{\mu^2}(\alpha_2\dot{\alpha}_1+2\alpha_1\dot{\alpha}_2)=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\mu}\left(\sqrt{1-e^2}\,\dot{\alpha}_1-\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\dot{\alpha}_2\right),\\
&\sin i\,\frac{di}{dt}=\alpha_2^{-2}(\alpha_3\dot{\alpha}_2-\alpha_2\dot{\alpha}_3);
\end{aligned}\right\}(2)
$$

以及

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{\Omega}=\dot{\beta}_3,\quad \dot{\tilde{\omega}}=\dot{\beta}_2+\dot{\beta}_3,\\
&\dot{\varepsilon}_0=\dot{\beta}_2+\dot{\beta}_3+\frac{1}{\mu}(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}\dot{\beta}_1-\frac{3}{\mu}\beta_1(-2\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}_1.
\end{aligned}\right\}\quad(3)
$$

将(4-5-19)式代入(2)、(3)式而得

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{a}=\frac{2a^2}{\mu}\frac{\partial R}{\partial\beta_1},\quad \dot{e}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\left(\sqrt{1-e^2}\frac{\partial R}{\partial\beta_1}-\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial R}{\partial\beta_2}\right),\\
&\frac{di}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin i}\left(\cos i\,\frac{\partial R}{\partial\beta_2}-\frac{\partial R}{\partial\beta_3}\right),\\
&\dot{\Omega}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_3},\quad \dot{\tilde{\omega}}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial R}{\partial\alpha_3},\\
&\dot{\varepsilon}_0=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial R}{\partial\alpha_3}-\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}-\frac{3a}{\mu}(\varepsilon_0-\tilde{\omega})\frac{\partial R}{\partial\beta_1}.
\end{aligned}\right\}(4)
$$

2. 在(4)式右端都是 R 对 α, β 的偏微商，有必要将它們换成对轨道根数的偏微商。

根据(1)式容易得到

$$
\frac{\partial R}{\partial\beta_1}=\frac{1}{\mu}(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_0}=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_0},\quad \frac{\partial R}{\partial\beta_2}=\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_0},
$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_3}=\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}+\frac{\partial R}{\partial \Omega}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}=\frac{\mu}{2\alpha_1^2}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\alpha_2^2}{\mu^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{3\beta_1}{\mu}(-2\alpha)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}$$

$$=\frac{2a^2}{\mu}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{a(1-e^2)}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{3a}{\mu}(\varepsilon_0-\tilde{\omega})\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}=\frac{2\alpha_1\alpha_2}{\mu^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{\alpha_3}{\sin i\,\alpha_2^2}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{\cos i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}=-\frac{1}{\alpha_2\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}=-\frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}.$$

将这些式子代入(4)式，并且在其中用平均角速度 n 来替代 $\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$，则得

$$\left.\begin{aligned}
\dot{a}&=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0},\\
\dot{e}&=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}-\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0},\\
\frac{di}{dt}&=-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}-\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}\right),\\
\dot{\Omega}&=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\dot{\tilde{\omega}}&=\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\varepsilon_0}{dt}&=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}\\
&\quad+\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

这就是把(4-5-19)式这一基本方程轉化为以軌道根数为变量的結果，也是所有各种摄动理論的根据。因为是由拉格朗日求得的，故称为拉格朗日行星运动方程。他本人推导的方法与上述不同，是直接从泛常数变分出发，引用拉格朗日括弧求出的，推导比較繁复，这里就不再談了❶。

3. 在很多地方軌道根数是用 $a, e, \chi, \omega, \Omega, i$ 表示的，故也有必要得到这些量的式子。其中 $\chi=-n\tau$，χ，ω 与前面各量的关系为

$$\chi=\varepsilon_0-\tilde{\omega}, \quad \omega=\tilde{\omega}-\Omega.$$

摄动函数 $R(a, e, i, \varepsilon_0, \tilde{\omega}, \Omega)$ 現在换成新軌道根数的函数 $\bar{R}(a, e, \chi, \omega, \Omega, i)$，則有下面的偏微商关系：

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega}+\frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \Omega}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega}-\frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_0}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \chi},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \tilde{\omega}}+\frac{\partial \bar{R}}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\omega}}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}-\frac{\partial \bar{R}}{\partial \chi},$$

并且有 $\dot{\tilde{\omega}}=\dot{\omega}+\dot{\Omega}$，$\dot{\varepsilon}_0=\dot{\chi}+\dot{\tilde{\omega}}=\dot{\chi}+\dot{\omega}+\dot{\Omega}$。把这些关系式代入(5)式整理后即得(仍然写成 R)

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{a}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \chi}, \quad \dot{e}=\frac{1}{na^2e}\left[(1-e^2)\frac{\partial R}{\partial \chi}-\sqrt{1-e^2}\frac{\partial R}{\partial \omega}\right],\\
&\dot{\chi}=-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}, \quad \dot{\Omega}=\frac{1}{na\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\dot{\omega}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\frac{di}{dt}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left[\operatorname{ctg} i\frac{\partial R}{\partial \omega}-\csc i\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

---

❶ 可参看 Smart 著 Celestial Mechanics Chapt 5 或 Tisserand 著 Traité de Mécanique Céleste, Tom. I, Chapt X 或 Moulton 著 Introduction to Celestial Mechanics Chapt X.

4. 在(5)式中我們可以看出在 $\dot{\tilde{\omega}}$, $\dot{e}$ 的式子里有 e 作为分母，而在太阳系的情况中 e 都非常小，使得討論摄动时有困难。为此，我們引入新变量 h, k, 使

$$h=e\sin\tilde{\omega},\quad k=e\cos\tilde{\omega}. \tag{7}$$

用 h 及 k 来代替 e 及 $\tilde{\omega}$，代入摄动函数 R 后，則原来的偏微商就成为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial e}&=\frac{\partial R}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial e}+\frac{\partial R}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial e}=\sin\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial h}+\cos\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial k},\\ \frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}&=\frac{\partial R}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial\tilde{\omega}}+\frac{\partial R}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial\tilde{\omega}}=k\frac{\partial R}{\partial h}-h\frac{\partial R}{\partial k},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\dot{h}&=\sin\tilde{\omega}\dot{e}+e\cos\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}},\\ \dot{k}&=\cos\tilde{\omega}\dot{e}-e\sin\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

以(8)式及(5)式中的 $\dot{e}$, $\dot{\tilde{\omega}}$ 代入(9)式，整理化簡后得

$$\dot{h}=\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k}-\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}$$

$$+\frac{k\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{\gamma na^2\sqrt{1-h^2-k^2}}\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{10}$$

$$\dot{k}=-\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial h}-\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{k}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}$$

$$-\frac{h\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{\gamma na^2\sqrt{1-h^2-k^2}}\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{11}$$

其中 $\gamma=\operatorname{tg} i$. 可以看出，这里的分母不再含小量了。$h$ 和 k 是与 e 同数量級的，如果所討論的天体的偏心率很小时，則(10)，(11)两式可近似地写为

$$\dot{h}=\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k},\quad \dot{k}=-\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial h}. \tag{12}$$

5．同样在 i，$\frac{di}{dt}$ 中含有 $\sin i$ 作分母，而一般情形下 i 都很小，有必要重新改用变量。令

$$p=\sin i\sin\Omega,\quad q=\sin i\cos\Omega,\tag{13}$$

则

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}&=\sin i\cos\Omega\dot{\Omega}+\cos i\sin\Omega\frac{di}{dt},\\ \dot{q}&=-\sin i\sin\Omega\dot{\Omega}+\cos i\cos\Omega\frac{di}{dt}.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

摄动函数 R 也有相应的转化：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial i}&=\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial i}+\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial i}\\ &=\cos i\sin\Omega\frac{\partial R}{\partial p}+\cos i\cos\Omega\frac{\partial R}{\partial q},\\ \frac{\partial R}{\partial\Omega}&=\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\Omega}+\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\Omega}\\ &=\sin i\cos\Omega\frac{\partial R}{\partial p}-\sin i\sin\Omega\frac{\partial R}{\partial q}.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

以(15)式及(5)式中的 $\dot{\Omega}$ $\frac{di}{dt}$ 代入(14)式，整理后得

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}&=\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q}\\ &\quad-\frac{p\cos i}{2na^2\cos^2\frac{1}{2}i\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_0}\right),\\ \dot{q}&=-\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p}\\ &\quad-\frac{q\cos i}{2na^2\cos^2\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_0}\right).\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

这里的分母也没有 $\sin i$ 了。如果 i 很小时，(16)式也可以近似地写为(因 p，q 含有 $\sin i$ 的因子)

$$\dot{p}=\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q},\quad \dot{q}=\frac{-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p}.\tag{17}$$

(10)，(11)和(16)式中，应該只含 h, k, p, q，不应再有 $e, \tilde{\omega}, i, \Omega$，所以需要按照(9)和(13)式的定义，把它們換算成 h, k, p, q，并且把 $\frac{\partial R}{\partial i}, \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}$ 换成 R 对 h, k, p, q 的偏微商。这个代换不难，讀者可以自己去作。

§7 用摄动力三分量表示的行星摄动运动方程

在用分析方法討論天体的运动时，常常用摄动力所产生的加速度的三个互相垂直的分量，来代替拉格朗日行星运动方程中 R 对軌道根数的偏微商。

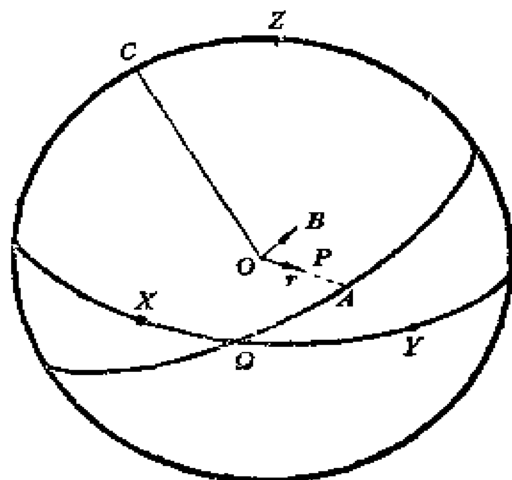


图 21

图21为日心天球，O 为太阳，P 为被摄动行星，它在天球上投影为 A，大圓 $X\Omega Y$ 为黄道，Ω 为行星軌道升交点，X 为春分点。現在将摄动力(設质量为 m_1 的行星 P_1 对行星 P 的摄动)产生的加速度分解为三个互相垂直的分量 S, T 和 W。S 沿着行星向徑 OP 的方向；T 在軌道平面上，它的方向垂直于向徑，与行星运动方向一致时为正；W 为軌道平面法綫方向，向北为正。这三个方向可用通过 O 点的向徑 OA, OB, OC 来表示。它們对黄道直角坐标系 $OXYZ$ 的方向余弦分别記为 (l_1, m_1, n_1)，(l_2, m_2, n_2)，(l_3, m_3, n_3)。在第二章§6里，我們已求得它們的表达式。令

$$u=\Omega A=\omega+f=\tilde{\omega}-\Omega+f,\tag{1}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i, \\ m_1 &= \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i, \\ n_1 &= \sin u\sin i; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} l_2 &= -\cos\Omega\sin u - \sin\Omega\cos u\cos i, \\ m_2 &= -\sin\Omega\sin u + \cos\Omega\cos u\cos i, \\ n_2 &= \cos u\sin i; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} l_3 &= \sin\Omega\sin i, \\ m_3 &= -\cos\Omega\sin i, \\ n_3 &= \cos i. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

设 R 为摄动函数，则由运动方程

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

可知 $\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ 为摄动力产生的加速度在 x, y, z 轴上的投影。根据 S, T, W 定义则有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= Sl_1 + Tl_2 + Wl_3, \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= Sm_1 + Tm_2 + Wm_3, \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= Sn_1 + Tn_2 + Wn_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此亦可得

$$\left.\begin{aligned} S &= l_1\frac{\partial R}{\partial x} + m_1\frac{\partial R}{\partial y} + n_1\frac{\partial R}{\partial z}, \\ T &= l_2\frac{\partial R}{\partial x} + m_2\frac{\partial R}{\partial y} + n_2\frac{\partial R}{\partial z}, \\ W &= l_3\frac{\partial R}{\partial x} + m_3\frac{\partial R}{\partial y} + n_3\frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} R &= Gm_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^3}\right), \\ \Delta^2 &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(x, y, z)为摄动行星 P 的坐标，r 为它的向徑。

(5)式已經将 $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ 表示为 S, T, W 的函数，但我們需要的是将拉格朗日行星运动方程中 R 对軌道根数的偏微商换成 S, T, W，下面就来进行这一轉换。

以 σ 表示軌道根数中的任意一个，則

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \sigma}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \sigma}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \sigma}. \tag{8}$$

由(l_1, m_1, n_1)的定义知 $x=rl_1$、$y=rm_1$，$z=rn_1$ 从而

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \sigma}&=r\frac{\partial l_1}{\partial \sigma}+l_1\frac{\partial r}{\partial \sigma},\\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}&=r\frac{\partial m_1}{\partial \sigma}+m_1\frac{\partial r}{\partial \sigma},\\ \frac{\partial z}{\partial \sigma}&=r\frac{\partial n_1}{\partial \sigma}+n_1\frac{\partial r}{\partial \sigma}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

以(9)，(5)代入(8)而得

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial \sigma}=&\left(r\frac{\partial l_1}{\partial \sigma}+l_1\frac{\partial r}{\partial \sigma}\right)(Sl_1+Tl_2+Wl_3)\\ &+\left(r\frac{\partial m_1}{\partial \sigma}+m_1\frac{\partial r}{\partial \sigma}\right)(Sm_1+Tm_2+Wm_3)\\ &+\left(r\frac{\partial n_1}{\partial \sigma}+n_1\frac{\partial r}{\partial \sigma}\right)(Sn_1+Tn_2+Wn_3).\end{aligned} \tag{10}$$

根据(2)，(3)，(4)知

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial l_1}{\partial \sigma}=&\frac{\partial l_1}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+\frac{\partial l_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \sigma}+\frac{\partial l_1}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial \sigma}\\ &=-m_1\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+l_2\frac{\partial u}{\partial \sigma}+l_3\frac{\partial i}{\partial \sigma}\sin u,\\ \frac{\partial m_1}{\partial \sigma}=&\,l_1\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+m_2\frac{\partial u}{\partial \sigma}+m_3\frac{\partial i}{\partial \sigma}\sin u,\\ \frac{\partial n_1}{\partial \sigma}=&\,n_2\frac{\partial u}{\partial \sigma}+n_3\frac{\partial i}{\partial \sigma}\sin u,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

代入(10)式則得

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma}=S\frac{\partial r}{\partial \sigma}+rT\left(n_3\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)$$
$$+rW\left(-n_2\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+\sin u\frac{\partial i}{\partial \sigma}\right). \tag{12}$$

在上面的推导中，我們用到了方向余弦的这样几个性质：

$$l_i^2+m_i^2+n_i^2=1,\ l_il_j+m_im_j+n_in_j=0\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ i\neq j),$$
$$-l_2m_1+m_2l_1=n_3,\qquad l_3m_1-l_1m_3=n_2.$$

在(12)式中，显然只要求出 $\frac{\partial r}{\partial \sigma}$，$\frac{\partial u}{\partial \sigma}$，就可以完成开始提出的任务了。

先来求 $\frac{\partial r}{\partial \sigma}$。由于 $r=a(1-e\cos E)$，故知

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma}=\frac{r}{a}\frac{\partial a}{\partial \sigma}-a\cos E\frac{\partial e}{\partial \sigma}+ae\sin E\frac{\partial E}{\partial \sigma}. \tag{13}$$

但
$$E-e\sin E=\int n\,dt+\varepsilon_0-\tilde{\omega},$$

其中右端第一項只包含 a，而对 a 求微商已另作，故略去。两端对 σ 求微商得

$$\frac{r}{a}\frac{\partial E}{\partial \sigma}-\sin E\frac{\partial e}{\partial \sigma}=\frac{\partial(\varepsilon_0-\tilde{\omega})}{\partial \sigma}, \tag{14}$$

从中解出 $\frac{\partial E}{\partial \sigma}$，并代入(13)式，經过簡单运算得

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma}=\frac{r}{a}\frac{\partial a}{\partial \sigma}-a\cos f\frac{\partial e}{\partial \sigma}+\frac{a^2e\sin E}{r}\frac{\partial(\varepsilon_0-\tilde{\omega})}{\partial \sigma}. \tag{15}$$

下面再来求 $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$。由于 $u=\tilde{\omega}-\Omega+f$，则

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=\frac{\partial(\tilde{\omega}-\Omega)}{\partial \sigma}+\frac{\partial f}{\partial \sigma}, \tag{16}$$

但因
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}f=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E,$$

故有
$$\frac{1}{\sin f}\frac{\partial f}{\partial \sigma}=\frac{1}{1-e^2}\frac{\partial e}{\partial \sigma}+\frac{1}{\sin E}\frac{\partial E}{\partial \sigma}.$$

以(14)式代入，并利用 $r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E$ 得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \sigma}=&\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\sin f\frac{\partial e}{\partial \sigma}\\
&+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\frac{\partial(\varepsilon_0-\tilde{\omega})}{\partial \sigma},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

则从(16)，(17)式可得 $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$.

把所得到的 $\frac{\partial r}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$ 的結果代入(12)式得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \sigma}=&\left[\frac{r}{a}\frac{\partial a}{\partial \sigma}-a\cos f\frac{\partial e}{\partial \sigma}+\frac{a^2e\sin E}{r}\frac{\partial(\varepsilon_0-\tilde{\omega})}{\partial \sigma}\right]S\\
&+\left[\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\sin f\frac{\partial e}{\partial \sigma}+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \sigma}\right.\\
&\left.+\left(1-\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\right)\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \sigma}-(1-\cos i)\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right]rT\\
&+\left[-\cos u\sin i\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}+\sin u\frac{\partial i}{\partial \sigma}\right]rW.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

在(18)式中，令 σ 分别等于各个軌道根数，立即可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial a}&=\frac{r}{a}S,\\
\frac{\partial R}{\partial e}&=-a\cos fS+r\sin f\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)T,\\
\frac{\partial R}{\partial i}&=r\sin u\,W,\\
\frac{\partial R}{\partial \Omega}&=-2r\sin^2\frac{i}{2}T-r\cos u\sin i\,W,\\
\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}&=\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}+rT,\\
\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}&=\frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}S+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r}T.
\end{aligned}
\right\}
\tag{19}
$$

以(19)式代入拉格朗日行星运动方程(4-6-5)，即得以 S, T, W 表示的行星运动方程

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[Se\sin f + \frac{p}{r}T\right],\\
\dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[S\sin f + T(\cos E + \cos f)\right],\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r\cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}}W,\\
\dot{\Omega} &= \frac{r\sin u}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W,\\
\dot{\tilde{\omega}} &= 2\sin^2\frac{i}{2}\,\dot{\Omega} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\right],\\
\dot{\varepsilon}_0 &= -\frac{2r}{na^2}S + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\dot{\tilde{\omega}} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}\,\dot{\Omega}.
\end{aligned}\right\} \quad (20)
$$

如果要化成用切綫分量 U，法綫分量 N 及軌道平面法綫方向分量 W 来表示，只需求出 U, N 和 S, T 的关系就行了。容易得

$$
U = S\cos\theta + T\sin\theta, \quad N = -S\sin\theta + T\cos\theta, \qquad (21)
$$

其中 θ 为向徑方向和切綫方向的交角。从几何学知道

$$
\operatorname{tg}\theta = r\frac{df}{dr} = \frac{1+e\cos f}{e\sin f},
$$

所以有

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{e\sin f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}},\\
\sin\theta &= \frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (22)
$$

把(22)式代入(21)式即得

$$
\left.\begin{aligned}
U &= \frac{e\sin f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}S + \frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}T,\\
N &= \frac{-(1+e\cos f)}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}S + \frac{e\sin f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}T.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)
$$

或反过来有

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{e\sin f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}U - \frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}N, \\ T &= \frac{1+e\cos f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}U + \frac{e\sin f}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}}N. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

根据(24)式就可以把(20)式化为 U, N 的式子(W 不变)。

§8 正 則 变 换

在天体力学的理論探討过程中，經常用的还是(4-5-19)式 $\dot{\alpha}_r = \frac{\partial R}{\partial \beta_r}$, $\dot{\beta}_r = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_r}$，这是正則方程的形式，而不是采用(4-6-5)式即拉格朗日行星运动方程的样子。有时亦需要把正則共軛变量 α, β 换为另外一組正則共軛变量，它們也是有正則方程的形式。为此就必須研究将一組正則共軛变量换为新的正則共軛变量的变换，这种变换被称为正則变换。此外，利用正則变换将极簡单地推出 §2, §5 的一些結果。在讲正則变换以前，我們先讲一組变量为正則共軛变量的充分条件。

定理 1　設 q_i, p_i ($i=1, 2, \cdots, k$) 为自变量 t 及 $2k$ 个任意常数 c_j ($j=1, 2, \cdots, 2k$) 的函数。定义

$$X_j = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} - \frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial c_j}. \tag{1}$$

只要(1)式中的 H 存在(它首先是 q, p, t 的函数，从而也是 t, c_j 的函数)，則 q_i, p_i 必为正則共軛变量，且为方程組

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \cdots, k) \tag{2}$$

的解。

証　若找到了这样满足(1)式的 H，它通过 q, p, t 而为 c, t 的函数，所以有

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial c_j}\right). \tag{3}$$

另外由(1)式知

$$
-\frac{\partial H}{\partial c_j}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}p_i\frac{\partial q_i}{\partial c_j}-\frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=1}^{k}p_i\dot{q}_i
$$

$$
=-\sum_{i=1}^{k}\left(\dot{q}_i\frac{\partial p_i}{\partial c_j}-\dot{p}_i\frac{\partial q_i}{\partial c_j}\right). \tag{4}
$$

将(4)式与(3)式相加，按 $\frac{\partial p_i}{\partial c_j}$、$\frac{\partial q_i}{\partial c_j}$ 整理后得

$$
\sum_{i=1}^{k}\left(x_i\frac{\partial p_i}{\partial c_j}+y_i\frac{\partial q_i}{\partial c_j}\right)=0 \quad (j=1,\ 2,\cdots,2k), \tag{5}
$$

其中 $x_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{q}_i,\quad y_i=\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ k).$

(5)式共有 $2k$ 个，为 $2k$ 个变量 x_i, y_i 的綫性齐次方程組，則它的系数行列式即为雅哥比行列式

$$
\frac{\partial(p_1 p_2\cdots p_k q_1 q_2\cdots q_k)}{\partial(c_1 c_2\cdots c_k\cdots c_{2k})}.
$$

由于 q, p 为 c 的相互独立函数，故上面的雅哥比行列式不为零，否則它們之間就有一个关系存在。因此，(5)式只有零解

$$
x_i=0,\quad y_i=0,
$$

即 $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k),$

也就是 q_i, p_i 为正則共軛变量，哈密尔頓函数即为(1)式所定义的 H。 証毕

其实上面的这个条件也是必要的，也就是若 q_i, p_i 是正則共軛变量，哈密尔頓函数为 H，則 H 必滿足(1)式。这个証明很容易，讀者可自己去証。所以上面叙述的这个条件是一个充要条件。

下面我們再来寻找一个变换为正則变换的充分条件。如果 q_i, p_i 是正則共軛变量，滿足(2)式的哈密尔頓函数为 $H(q,\ p,\ t)$，通过变换

$$
q_i=q_i(Q,\ P,\ t),\quad p_i=p_i(Q,\ P,\ t)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{6}
$$

轉換为一組新变量 Q_i, P_i $(i=1, 2, \cdots, k)$. 由(6)式可形式地解出 Q, P 为 q, p, t 的函数

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t). \tag{7}$$

若(2)式解出以后,可以有 q_i, p_i 为 $2k$ 个积分常数 c_j 及 t 的函数

$$q_i = q_i(c, t), \quad p_i = p_i(c, t), \tag{8}$$

将它們代入(7)式就有

$$Q_i = Q_i(c, t), \quad P_i = P_i(c, t). \tag{9}$$

在 q, p, Q, P 四組变量中,我們可以把任两个看为自变量。例如(6)式是以 Q, P 为自变量,而(7)式是 q, p 为自变量。我們也可以采取 q, Q 为自变量,由(6)式可以形式地解出 p, P 为 q, Q 及 t 的函数

$$P_i = P_i(q, Q, t), \quad p_i = p_i(q, Q, t).$$

現在来叙述(6)式为正則变换的充分条件。

定理 2 如果存在一个 q, Q, t 的函数 $F(q, Q, t)$ 满足条件

$$\delta F = \sum_{i=1}^{k} p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^{k} P_i \delta Q_i, \tag{10}$$

其中 δF, δq_i, δp_i 为与 t 无关的变分。那末(6)式为正則变换,即 Q, P 亦为正則共軛变量,且它們的哈密尔顿函数 H' 为

$$H' = H + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} = H'(Q, P, t). \tag{11}$$

証 比較

$$\delta F = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \delta Q_i \right)$$

与(10)式,得

$$p_i = \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q_i}. \tag{12}$$

(12)式可用来代替(10)式作为定理的条件。

由定理 1 可知,証明 Q, P 为正則共軛变量只需要証明关系式

$$Y=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}P_i\frac{\partial Q_i}{\partial c_j}-\frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=1}^{k}P_i\dot{Q}_i\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k)\quad(13)$$

为某一函数 $-H'$ 对 c_j 的偏导数。

因 q_i, p_i 为正則共軛变量，所以(1)式成立。将(1)式与(13)式相减得

$$X-Y=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}\left(p_i\frac{\partial q_i}{\partial c_j}-P_i\frac{\partial Q_i}{\partial c_j}\right)-\frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=1}^{k}(p_i\dot{q}_i-P_i\dot{Q}_i),$$

以(1)式代入得

$$X-Y=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial c_j}+\frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial c_j}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right).\qquad(14)$$

但
$$\frac{\partial F}{\partial c_j}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial c_j}+\frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial c_j}\right),$$
$$\frac{dF}{dt}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right)+\frac{\partial F}{\partial t},$$

将它們代入(14)式得

$$X-Y=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial c_j}\right)-\frac{\partial}{\partial c_j}\left(\frac{dF}{dt}-\frac{\partial F}{\partial t}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial c_j}\left(\frac{\partial F(q,\ Q,\ t)}{\partial t}\right).$$

因
$$X=-\frac{\partial H}{\partial c_j},$$

所以
$$Y=-\frac{\partial H'}{\partial c_j},$$

其中
$$H'=H+\frac{\partial F(q,\ Q,\ t)}{\partial t}.$$

上式右端可轉換成 Q, P, t 的函数 $H'(Q,\ P,\ t)$. 由定理1便知 Q, P 是正則共軛变量，且滿足

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H'(Q,\ P,\ t)}{\partial P_i},\qquad \dot{P}_i=-\frac{\partial H'(Q,\ P,\ t)}{\partial Q_i}.\qquad(15)$$

証毕

定理2所叙述的条件仅仅是充分条件，我們也可以把这个条件用拉格朗日括弧或柏松括弧来表示。由于在(10)式中，F 是 q, Q, t 的函数，但根据 $q_i=q_i(Q, P, t)$，故 F 也是 Q, P, t 的函数，所以对应于 Q, P 的与 t 无关的变分 $\delta Q, \delta P$ 有

$$\left.\begin{aligned} \delta F &= \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\delta Q_i+\frac{\partial F}{\partial P_i}\delta P_i\right) \\ \text{以及}\qquad \delta q_r &= \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_i}\delta Q_i+\frac{\partial q_r}{\partial P_i}\delta P_i\right). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

以(16)式代入(10)式得

$$\sum_r\sum_i p_r\left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_i}\delta Q_i+\frac{\partial q_r}{\partial P_i}\delta P_i\right)-\sum_i P_i\delta Q_i$$
$$=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\delta Q_i+\frac{\partial F}{\partial P_i}\delta P_i\right).$$

由于 $\delta Q_i, \delta P_i$ 的任意性，比較它們两端的系数得

$$\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial Q_i}-P_i=\frac{\partial F}{\partial Q_i}\quad (i=1, 2, \cdots, k), \tag{17}$$

$$\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_i}=\frac{\partial F}{\partial P_i}\quad (i=1, 2, \cdots, k). \tag{18}$$

将(18)式两边对 P_j 取偏导数得

$$\frac{\partial}{\partial P_j}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial F}{\partial P_i}\right)=\frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial F}{\partial P_j}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial P_i}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_j},$$

故有
$$\frac{\partial}{\partial P_j}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_i}-\frac{\partial}{\partial P_i}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_j}=0,$$

即
$$\sum_r\left(\frac{\partial q_r}{\partial P_i}\frac{\partial p_r}{\partial P_j}-\frac{\partial q_r}{\partial P_j}\frac{\partial p_r}{\partial P_i}\right)=0.$$

上式左边即为拉格朗日括弧 $[P_i, P_j]$ 的定义，所以有

$$[P_i, P_j]=0. \tag{19}$$

同理，将(17)式两端对 Q_j 取偏微商，得

$$[Q_i, Q_j]=0. \tag{20}$$

在(17)式中，两端对 P_i 取偏导数，(18)式中两端对 Q_i 取偏导数，相减得

$$\frac{\partial}{\partial P_i}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial Q_i}-1-\frac{\partial}{\partial Q_i}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_i}=0,$$

即
$$\sum_r\left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_i}\frac{\partial p_r}{\partial P_i}-\frac{\partial q_r}{\partial P_i}\frac{\partial p_r}{\partial Q_i}\right)=1,$$

从而得

$$[Q_i, P_i]=1. \tag{21}$$

同法将(17)式两端对 P_j $(j\neq i)$ 取偏导数，得

$$\frac{\partial}{\partial P_j}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial Q_i}=\frac{\partial^2 F}{\partial P_j\partial Q_i}.$$

在(18)式中把 i 换写成 j，再两边对 Q_i 取偏导数 $(i\neq j)$，得

$$\frac{\partial}{\partial Q_i}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial P_j\partial Q_i},$$

与前一式相减而得

$$[Q_i, P_j]=0 \quad (i\neq j). \tag{22}$$

(19)，(20)，(21)，(22)四式是由定理2所叙述的正则变换的充分条件推得，但这并不說明它們也是正則变换的充分条件。为此必須証明定理3。

定理3 (19)，(20)，(21)，(22)是变换(6)式为正則变换的充分条件。

显然，我們只要从(19)，(20)，(21)，(22)能推出定理2所确定的条件[即存在 F 满足(10)式]，定理3就可成立了。我們采用的方法是証明刚才推出(19)，(20)，(21)，(22)的过程的逆过程亦成立。

証 令 $M_1, \cdots, M_k, N_1, \cdots, N_k$ 为 Q, P, t 的函数，

$$M_i=\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial Q_i}-P_i, \tag{23}$$

$$N_i=\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k).\tag{24}$$

作下面的一个微分式：

$$M_1\delta Q_1+\cdots+M_k\delta Q_k+N_1\delta P_1+\cdots+N_k\delta P_k,\tag{25}$$

現在我們来証明它是一个全微分。

由(24)式得

$$\frac{\partial N_i}{\partial P_j}=\frac{\partial}{\partial P_j}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_i}=\sum_r\frac{\partial p_r}{\partial P_j}\frac{\partial q_r}{\partial P_i}+\sum_r p_r\frac{\partial^2 q_r}{\partial P_j\partial P_i},$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial P_i}=\frac{\partial}{\partial P_i}\sum_r p_r\frac{\partial q_r}{\partial P_j}=\sum_r\frac{\partial p_r}{\partial P_i}\frac{\partial q_r}{\partial P_j}+\sum_r p_r\frac{\partial^2 q_r}{\partial P_i\partial P_j},$$

两式相减得

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial P_j}-\frac{\partial N_j}{\partial P_i}&=\sum_r\left(\frac{\partial q_r}{\partial P_i}\frac{\partial p_r}{\partial P_j}-\frac{\partial q_r}{\partial P_j}\frac{\partial p_r}{\partial P_i}\right)\\&=[P_i,\ P_j].\end{aligned}$$

以(19)式代入得

$$\frac{\partial N_i}{\partial P_j}=\frac{\partial N_j}{\partial P_i}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k).\tag{26}$$

同样，由(23)式并利用(20)式可得

$$\frac{\partial N_i}{\partial Q_j}=\frac{\partial M_j}{\partial Q_i}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k);\tag{27}$$

由(23)，(24)式分别利用(21)，(22)式可得

$$\frac{\partial M_i}{\partial P_i}=\frac{\partial N_i}{\partial Q_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k);\tag{28}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial P_j}=\frac{\partial N_j}{\partial Q_i}\quad (i\neq j)\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k).\tag{29}$$

(26)，(27)，(28)，(29)式其实就是(25)式关于 Q,P 为全微分的充要条件(在高等数学中，对于三个变量的情况是証明过的，对 $2k$ 个变量的情况，可以很容易地加以推广)，因此存在一个 $Q,\ P,\ t$ 的函数 $F(Q,\ P,\ t)$，且有

$$M_i=\sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i}-P_i=\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \tag{30}$$

$$N_i=\sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial P_i}=\frac{\partial F}{\partial P_i}. \tag{31}$$

(30)，(31)式就是前面的(17)，(18)式，由它們再推出(10)是很容易的，讀者可自己去作。 証毕

由上可見，(19)，(20)，(21)，(22)与定理2所讲的条件是互为充要的，但由于后者仅是充分条件，所以我們得到的也仅仅是正則变换的充分条件。

正則变换的条件也能以柏松括弧来表示。

定理4 变换(6)式为正則变换的充分条件是

$$\left.\begin{aligned}&\{Q_i,\ P_i\}=1, \quad \{Q_i,\ Q_j\}=0,\\ &\{P_i,\ P_j\}=0, \quad \{Q_i,\ P_j\}=0 \quad (i\neq j).\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

我們应用§4所讲的柏松括弧与拉格朗日括弧的关系来証明这个定理。

証 若以$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$；$P_1, P_2, \cdots, P_k$来对应§4中的$a_1, a_2, \cdots, a_{2k}$，这时柏松括弧所組成的行列式Δ_1为

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\{Q_1,Q_1\}\{Q_2,Q_1\}\cdots\cdots & \{P_1,Q_1\}\cdots\cdots\{P_k,Q_1\}\\ \{Q_1,Q_2\}\{Q_2,Q_2\}\cdots\cdots & \cdots\cdots\{P_2,Q_2\}\cdots\{P_k,Q_2\}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \{Q_1,P_1\}\{Q_2,P_1\}\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\{P_k,P_1\}\\ \{Q_1,P_2\}\{Q_2,P_2\}\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\{P_k,P_2\}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \{Q_1,P_k\}\{Q_2,P_k\}\cdots\{Q_k,P_k\} & \cdots\cdots\cdots\{P_k,P_k\}\end{vmatrix},$$

将(32)式代入得

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1\ \cdots\cdots & 0\\ \vdots & & & & \ddots & \vdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}=1. \qquad (33)$$

它的形状是只有右上角左下角各有一 k 阶的单位方陣，其他的元素全为零，所以行列式的值为 1.

把(4-4-10)式应用到現在的情况，便有

$$[Q_i,\ Q_j]=0,\quad [P_i,\ P_j]=0,$$

$$[Q_i,\ P_i]=1,\quad [Q_i,\ P_j]=0\quad (i\neq j)$$

成立。再由定理 3，便知(32)是(6)为正則变换的充分条件。

本定理也可利用 § 5 中讲的雅哥比倒数关系去証。讀者可以将它当作一个习題自己去証明。要判断变換是否为正則变換，利用定理 3 或定理 4 在一般情况下較定理 2 为簡便，但不能得出新的哈密尔頓函数，而定理 2 却能做到这一点，所以它們各有优缺点。

§ 9　正則变換的应用和特例

上节所讲的是正則变換的一般定义和条件，在天体力学中常遇到的是較簡单的特例，現在分别加以討論。

1. 若变換后 Q_i, P_i 的哈密尔頓函数 $H'=0$，即有

$$\dot{Q}_i=\dot{P}_i=0,$$

則 Q_i, P_i 为常数。設

$$Q_i=\alpha_i,\quad P_i=-\beta_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k),$$

这时(4-8-12)式成为

$$p_i=\frac{\partial F(q,\ \alpha,\ t)}{\partial q_i},\quad \beta_i=\frac{\partial F(q,\ \alpha,\ t)}{\partial \alpha_i},\tag{1}$$

而(4-8-11)式成为

$$H(q,\ p,\ t)+\frac{\partial F(q,\ \alpha,\ t)}{\partial t}=0$$

或

$$H\left(q,\ \frac{\partial F}{\partial q},\ t\right)+\frac{\partial F(q,\ \alpha,\ t)}{\partial t}=0.\tag{2}$$

由此显然可見，F 就是 § 2 所叙述的哈密尔頓-雅哥比方法中的函数 S，而(2)式即哈密尔頓-雅哥比方程。这样，作为正則变换的一个应用，我們极簡易地推出了哈密尔頓-雅哥比方法。

我們还可以利用正則变换来推出摄动理論的基本方程。

設天体运动方程为

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k),\tag{3}$$

其中 $H=H_0-R$，H_0 为无摄动的运动的哈密尔頓函数，R 为摄动函数，

用哈密尔頓-雅哥比方法来解无摄动运动的方程，即从

$$\frac{\partial S(q,\ \alpha,\ t)}{\partial t}+H_0\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q},\ t\right)=0\tag{4}$$

解出 S，再由

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i},\quad \beta_i=\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\tag{5}$$

解出 q 和 p，

$$q_i=q_i(\alpha,\ \beta,\ t),\quad p_i=p_i(\alpha,\ \beta,\ t).\tag{6}$$

在考虑摄动时，α、β 不再为常量，而使(6)式满足(3)。也可以把(6)式看为由变量 q、p 到 α、β 的变换，仿照前面的記号，令

$$Q_i=\alpha_i,\quad P_i=-\beta_i,$$

这时
$$\delta S=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\delta\alpha_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(p_i\delta q_i+\beta_i\delta\alpha_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}p_i\delta q_i-\sum_{i=1}^{k}P_i\delta Q_i.$$

把上节定理 2 中的 F 取作 S，可見 F 是存在的，因此 Q, P 是正則共軛变量，它满足方程

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H'}{\partial P_i},\quad \dot{P}_i=-\frac{\partial H'}{\partial Q_i},$$

其中
$$H'=H+\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial t}=H-H_0=-R.$$

代入前式，再将 Q, P 换成 α, β 得

$$\dot{\alpha}_i=\frac{\partial R}{\partial\beta_i},\quad \dot{\beta}_i=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_i}.\tag{7}$$

这样，就极其簡单地推出了摄动运动的基本方程。

2．若 q_i, p_i 与 Q_i, P_i 之間除一对以外，其余都相同，我們来看这时正則变换的条件成什么样子。不妨設只有 $i=1$ 时不同，即

$$\left.\begin{aligned}&q_1=q_1(Q,P,t),\quad p_1=p_1(Q,P,t),\\&q_r=Q_r,\quad p_r=P_r\quad(r=2,3,4,\cdots,k).\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

显然，因 q_r 只包含 Q_r；p_r 只包含 P_r；q_1 只包含 Q_1, P_1；p_1 也只包含 Q_1, P_1；故有

$$[Q_i,Q_j]=0,\quad [P_i,P_j]=0,$$
$$[Q_i,P_j]=0\quad(i\neq j).$$

至于条件 $[Q_i,P_i]=1$，对 $i=2,3,\cdots,k$ 时也显然成立，在 $i=1$ 时

$$[Q_1,P_1]=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_1}\frac{\partial p_j}{\partial P_1}-\frac{\partial q_j}{\partial P_1}\frac{\partial p_j}{\partial Q_1}\right)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial(q_j,p_j)}{\partial(Q_1,P_1)}.$$

因只有 q_1, p_1 包含 Q_1, P_1，所以有

$$[Q_1, P_1]=\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(Q_1, P_1)}.$$

用上节定理 3 知这时的正則变换条件为

$$\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(Q_1, P_1)}=1. \tag{9}$$

如果用上节定理 4，則条件成为

$$\frac{\partial(Q_1, P_1)}{\partial(q_1, p_1)}=1. \tag{9'}$$

因此，判断变换(8)是否为正則变换，只要判断(9)式或(9')式是否成立就行了。

3．綫性变换的情形。如果 Q_r 只是 q_r 的綫性齐次函数，P_r 只是 p_r 的綫性齐次函数，即

$$\left.\begin{aligned} Q_r&=A_{r1}q_1+A_{r2}q_2+\cdots+A_{rk}q_k=\sum_{s=1}^{k}A_{rs}q_s,\\ P_r&=B_{r1}p_1+B_{r2}p_2+\cdots+B_{rk}p_k=\sum_{s=1}^{k}B_{rs}p_s, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中 A_{rs}，B_{rs} 为常数。

現在利用上节定理 2 来求出变换(10)为正則变换的一个充分条件。如果存在函数 F，使

$$\delta F=\sum_r p_r\,\delta q_r-\sum_r P_r\delta Q_r,$$

則变换(10)为正則变换。显然如果我們有 $F=0$ 也可以，这时上式成为

$$\sum_r p_r\,\delta q_r-\sum_r P_r\,\delta Q_r=0. \tag{11}$$

故只要满足(11)式，就是正則变换了。現在我們来作进一步的轉化。将(10)式代入(11)式得

$$\sum_r p_r\,\delta q_r-\sum_r\sum_s\sum_t A_{rs}B_{rt}p_t\,\delta q_s=0, \tag{12}$$

也可以写成

$$\sum_s\left[p_s-\sum_r\sum_t A_{rs}\,B_{rt}\,p_t\right]\delta q_s=0. \tag{12'}$$

显然只要

$$\sum_{r=1}^{k} A_{rs}B_{rs}=1, \quad \sum_{r=1}^{k} A_{rs}B_{rt}=0 \quad (s\neq t) \tag{13}$$

成立时，(12′)式就成立．所以(13)式可看作变换(10)为正则变换的充分条件。如(13)式成立，则Q_r、P_r为正則共軛变量，它們的哈密尔頓函数应为$H'=H+\dfrac{\partial F}{\partial t}$。但这里的$F=0$，故$H'=H$，卽哈密尔頓函数不变，因此$Q_r$，$P_r$的正則方程組为

$$\dot{Q}_r=\frac{\partial H}{\partial P_r}, \quad \dot{P}_r=-\frac{\partial H}{\partial Q_r}.$$

4. 若在綫性变换(10)中，$A_{rs}=B_{rs}$，此时称为正交变换。条件(13)相应成为

$$\sum_{r=1}^{k} A_{rs}^2=1, \quad \sum_{r=1}^{k} A_{rs}A_{rt}=0 \quad (s\neq t). \tag{14}$$

§10 德洛納变量和潘加来变量

在研究不同对象的天体的摄动运动时，需要取适当的基本变量，使得討論更方便。我們已經有摄动理論的基本方程式

$$\dot{\alpha}_i=\frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i=-\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}, \tag{1}$$

其中R为摄动函数。根据§2我們知α，β与密切橢圓軌道根数的关系是

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1=-\frac{\mu}{2a}, && \beta_1=-\tau,\\ &\alpha_2=\sqrt{\mu a(1-e^2)}, && \beta_2=\omega,\\ &\alpha_3=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, && \beta_3=\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在§6中，已說明了通过(2)式把(1)式轉化成为軌道根数的拉格朗日行星运动方程。在解时要把摄动函数展开成为时間t的三角級数，一般方法是展开成为行星平近点角M的三角級数，故

直接用 M 作变量，討論更为方便，这就是德洛納的想法。为了变化小些，他取新变量为 L, G, H, l, g, h，除 L, l 外，其余四个都是原来的 α, β，即

$$
\text{設}\quad\left.\begin{aligned}
&G=\alpha_2, \qquad\qquad g=\beta_2,\\
&H=\alpha_3, \qquad\qquad h=\beta_3.\\
&L=L(\alpha, \beta, t),\\
&l=M=n(t+\beta_1)=(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}\frac{(t+\beta_1)}{\mu},
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

这就是上节中 2 的情形。我們需要新变量仍为正則共軛变量，也就是要(3)式为正則变换。利用(4-9-9')来确定待定函数 $L(\alpha,\beta,t)$ 的形式，它必須滿足

$$
\frac{\partial(L, l)}{\partial(\alpha_1, \beta_1)}=1. \tag{4}
$$

要得出(4)式的一般解是很困难的，但也沒有这个必要，我們可以对 L 的形式作某些簡化的假定，只要它滿足(4)就行了。现在我們假定 L 只包含 α_1，不包含 β_1 也不明显含 t，此时(4)式成为

$$
\frac{\partial L}{\partial\alpha_1}\frac{\partial l}{\partial\beta_1}=1,
$$

即

$$
n\frac{dL}{d\alpha_1}=1.
$$

由此得

$$
L=\int\frac{d\alpha_1}{n}=\int\mu(-2\alpha_1)^{-\frac{3}{2}}d\alpha_1=\mu(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\mu a}. \tag{5}
$$

采取(5)式的 L，就可以保証新变量为正則共軛变量。

现在来求新的哈密尔頓函数。由(3)及(1)得

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{L}=\frac{\partial L}{\partial\alpha_1}\dot{\alpha}_1+\frac{\partial L}{\partial\beta_1}\dot{\beta}_1+\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial\alpha_1}\frac{\partial R}{\partial\beta_1}-\frac{\partial L}{\partial\beta_1}\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial L}{\partial t},\\
&\dot{l}=\frac{\partial l}{\partial\alpha_1}\frac{\partial R}{\partial\beta_1}-\frac{\partial l}{\partial\beta_1}\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial l}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

摄动函数 R 通过(3)式可表为 L, l, G, g, H, h 及 t 的函数，

因此

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}&=\frac{\partial R}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial R}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial \alpha_1},\\
\frac{\partial R}{\partial \beta_1}&=\frac{\partial R}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial \beta_1}+\frac{\partial R}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial \beta_1}.
\end{aligned}\right\}\tag{7}
$$

将(7)式代入(6)式得

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{L}&=\frac{\partial(L,\,l)}{\partial(\alpha_1,\,\beta_1)}\frac{\partial R}{\partial l}+\frac{\partial L}{\partial t},\\
\dot{l}&=-\frac{\partial(L,\,l)}{\partial(\alpha_1,\,\beta_1)}\frac{\partial R}{\partial L}+\frac{\partial l}{\partial t}.
\end{aligned}\right\}\tag{8}
$$

以(4)式代入得

$$
\dot{L}=\frac{\partial R}{\partial l}+\frac{\partial L}{\partial t},\qquad \dot{l}=-\frac{\partial R}{\partial L}+\frac{\partial l}{\partial t}.\tag{9}
$$

设新摄动函数为

$$
R'=R+\phi,
$$

使得(9)式也为正则形式，即

$$
\dot{L}=\frac{\partial R'}{\partial l}=\frac{\partial R}{\partial l}+\frac{\partial \phi}{\partial l},
$$

$$
\dot{l}=\frac{\partial R'}{\partial l}=-\frac{\partial R}{\partial L}-\frac{\partial \phi}{\partial L}.
$$

与(9)式比较得

$$
\frac{\partial \phi}{\partial l}=\frac{\partial L}{\partial t},\qquad \frac{\partial \phi}{\partial L}=-\frac{\partial l}{\partial t}.\tag{10}
$$

但因 L 不明显含 t，故 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，所以 $\frac{\partial \phi}{\partial l}=0$，即 ϕ 不明显包含 l. 为了不影响其他几个变量的方程，可以设 ϕ 不包含 G, g, H, h, 也不显含 t. 于是 ϕ 就只包含 L, 因此得

$$
\frac{\partial \phi}{\partial L}=\frac{d\phi}{dL}=-\frac{\partial l}{\partial t}=-n,
$$

故

$$
d\phi=-n\,dL=-d\alpha_1.\tag{11}
$$

最后結果成为

$$\left.\begin{aligned} &L=\mu(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\mu a}, && l=n(t+\beta_1)=M,\\ &G=\alpha_2=\sqrt{\mu a(1-e^2)}, && g=\beta_2=\omega,\\ &H=\alpha_3=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, && h=\beta_3=\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

它們的正則方程为

$$\left.\begin{aligned} &\dot{L}=\frac{\partial R'}{\partial l}, && \dot{l}=-\frac{\partial R'}{\partial L},\\ &\dot{G}=\frac{\partial R'}{\partial g}, && \dot{g}=-\frac{\partial R'}{\partial G},\\ &\dot{H}=\frac{\partial R'}{\partial h}, && \dot{h}=-\frac{\partial R'}{\partial H}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中哈密尔頓函数

$$R'=R+\phi=R+\frac{\mu^2}{2L^2}. \tag{14}$$

由(12)式所定义的变量称为德洛納变量。德洛納本人在他的月球运动論中首次采用，以后很多人也利用它来作其他天体力学問題的基本变量。这組变量有一个特点值得注意，就是 l, g, h 三个量都代表角度，故便于展开摄动函数为它們的三角級数。

在有些問題中，再把德洛納变量作一种簡单的綫性变换。由(12)式可以看出

$$L-G=\sqrt{\mu a}-\sqrt{\mu a(1-e^2)}=L\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),$$

$$G-H=G(1-\cos i)=2G\sin^2\frac{i}{2}.$$

这两个量与 e^2 及 $\sin^2\frac{i}{2}$ 同数量級，在 e, i 很小时，它們都是二級小量，这种情形在天文学中是常見的。把摄动函数展开为它們的冪級数收斂会更快些，因此定义新变量

$$\left.\begin{aligned} &L'=L\qquad\;\; =A_{11}L+A_{12}G+A_{13}H,\\ &G'=G-L=A_{21}L+A_{22}G+A_{23}H,\\ &H'=H-G=A_{31}L+A_{32}G+A_{33}H, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

这是一个綫性变换,系数

$$A_{11}=1,\quad A_{12}=A_{13}=0,\quad A_{21}=-1,\quad A_{22}=1,$$
$$A_{23}=0,\quad A_{31}=0,\quad A_{32}=-1,\quad A_{33}=1.$$

既然新变量 L', G', H' 为原来变量 L, G, H 的綫性齐次函数,为了保証新变量也是正則共軛变量,又不要使新旧变量之間的关系复杂,以致使用不便,最簡单还是假定新的另一組变量 l', g', h' 仍为 l, g, h 的綫性齐次函数,即設

$$\left.\begin{aligned} l' &= B_{11}l + B_{12}g + B_{13}h,\\ g' &= B_{21}l + B_{22}g + B_{23}h,\\ h' &= B_{31}l + B_{32}g + B_{33}h. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

在上节的特例 3 中,我們知道这种变换为正則变换的条件为

$$\sum_{r=1}^{3} A_{rs}B_{rs}=1,\quad \sum_{r=1}^{3} A_{rs}B_{rt}=0\quad (s\neq t;\ s, t=1, 2, 3).$$

上式共为 9 个方程,因 A_{rs} 为已知,将它們代入就为包含 9 个未知数 B_{rs} 的綫性非齐次方程。容易解出

$$B_{11}=B_{12}=B_{13}=B_{22}=B_{23}=B_{33}=1,$$
$$B_{21}=B_{31}=B_{32}=0,$$

即得

$$l'=l+g+h,\quad g'=g+h,\quad h'=h. \tag{17}$$

最后結果为

$$\left.\begin{aligned} &L'=L=\sqrt{\mu a}, && l'=l+g+h=M+\tilde{\omega}=\lambda,\\ &G'=G-L=-\sqrt{\mu a}\,(1-\sqrt{1-e^2}), && g'=g+h=\tilde{\omega},\\ &H'=H-G=-\sqrt{\mu a(1-e^2)}\,(1-\cos i), && h'=h=\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

这組变量仍为正則共軛变量,且据上节所述,哈密尔頓函数不变,仍为 $R+\dfrac{\mu^2}{2L^2}$. 我們称由(18)式定义的变量为推广的德洛納变量。

(18)式中的 l', g', h' 都是角度,摄动函数将展开为它們的多

重三角級数。在数学中,关于多重三角級数的討論是很困难的,潘加来在他的天体力学理論中,将由(18)式所定义的变量又作了如下的一些变换:他先設 L'、H'、l', h' 不变,只改变 G', g', 定义新变量

$$G_1=A(G')\sin g', \quad g_1=A(G')\cos g', \tag{19}$$

其中 A 只包含 G', 不明显含 t, 且是根据使新变量为正则共軛变量来确定的待定函数。这里又是仅有一对变量的变换,正則变换的条件为

$$\frac{\partial(G_1, g_1)}{\partial(G', g')}=1,$$

即

$$A\frac{\partial A}{\partial G'}=A\frac{dA}{dG'}=-1,$$

从而得

$$A=\sqrt{-2G'}. \tag{20}$$

代入(19)式而得的新变量 G_1, g_1, L', l', H', h' 仍为正則共軛变量。至于新的哈密尔頓函数可利用(10)式的結果,即令 $R''=R'+\phi$, 有

$$\frac{\partial\phi}{\partial g_1}=\frac{\partial G_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial G_1}=-\frac{\partial g_1}{\partial t}.$$

因为 G_1, g_1 均不明显含 t, 所以 $\frac{\partial G_1}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial t}=0$, 因此 ϕ 不含 G_1, g_1。但这个变换与其他四个变量无关,故可令 $\phi=0$, 而并不影响正則形式,因此得哈密尔頓函数不变,仍为 $R'=R+\frac{\mu^2}{\partial L^2}$。

同样,再假定 L', l', G_1, g_1 不变,只改变 H', h', 即

$$H_1=B(H')\sin h', \quad h_1=B(H')\cos h',$$

其中 B 为待定函数。用完全同样的办法可确定 $B=\sqrt{-2H'}$。新变量仍为正則共軛变量,而哈密尔頓函数不变。这样得到的变量 L', l', G_1, g_1, H', h' 被称为潘加来变量,記为

$$
\left.\begin{aligned}
&L=\sqrt{\mu a}, && \lambda=l+\tilde{\omega},\\
&\xi=\sqrt{-2G'}\sin g', && \eta=\sqrt{-2G'}\cos g',\\
&p=\sqrt{-2H'}\sin h', && q=\sqrt{-2H'}\cos h'.
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

容易看出，潘加来变量中只有一个角度变量 λ，所以摄动函数可展为 λ 的三角級数，ξ, η, p, q 的冪級数和系数为 L 的函数。

§11 月球火箭的运动方程

作为前节的一个例子，我們用德洛納变量和潘加来变量来表示月球火箭的运动方程。

由于月球火箭的质量相对于地球和月球的质量来說可以略去不計，則地球、月球火箭組成了一个限制性三体問題，因月球和地球的相对軌道为椭圆，所以是椭圓型限制性三体問題。先从一般三体問題的直角坐标摄动运动方程出发。設地球为坐标原点，月球火箭的坐标为 (x, y, z)，则它的运动方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}+\frac{GM}{r^3}x=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \ddot{y}+\frac{GM}{r^3}y=\frac{\partial R}{\partial y},\\
&\qquad\qquad \ddot{z}+\frac{GM}{r^3}z=\frac{\partial R}{\partial z},\\
\text{其中}\quad &R=Gm\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r\cos H^*}{r'^2}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

M 为地球质量，m 为月球质量（月球火箭质量已經忽略），r 为月球火箭到地球的距离，r' 为月球到地球的距离，Δ 为月球火箭与月球間的距离，H^* 为月球火箭与月球在地球处的时角。

由于月球繞地球的椭圓軌道偏心率不大，作为一个近似的討論，可把这个三体問題看为圓型限制性三体問題。取地球和月球的质量和为质量单位，令 $m=\mu$，則 $M=1-\mu$；取地球和月球的距离为长度单位，則 $r'=1$；取适当的时間单位而使万有引力常数 $G=1$，于是运动方程变为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\frac{1-\mu}{r^3}x=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \ddot{y}+\frac{1-\mu}{r^3}y=\frac{\partial R}{\partial y},\\ \ddot{z}+\frac{1-\mu}{r^3}z=\frac{\partial R}{\partial z},\\ R=\mu\left(\frac{1}{\Delta}-r\cos H^*\right)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\frac{x}{r^3}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial x},\quad \ddot{y}+\frac{y}{r^3}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial y},\quad \ddot{z}+\frac{z}{r^3}=\frac{\partial \bar{R}}{\partial z},\\ \bar{R}=\mu\left(\frac{1}{\Delta}-r\cos H^*-\frac{1}{r}\right).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

(3)式与一般三体問題的摄动运动方程形式完全一样，只是 $\mu'=1$（这里以 μ' 来記上节中的 μ，以免产生符号混淆），并且摄动函数的形式略有不同。因此我們可以把(3)式看作中心体位于地球处，其质量为1，受一种摄动函数为 $\bar{R}$ 的摄动問題。

用§5所讲的方法，由(3)式推出摄动运动基本方程为

$$\dot{\alpha}_i=\frac{\partial \bar{R}}{\partial \beta_i},\quad \dot{\beta}_i=-\frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha_i}\quad (i=1,2,3).\tag{4}$$

其中 α_i, β_i 意义与以前一样，故可利用上节所定义的德洛納变量 L, l, G, g, H, h 来表示，即

$$\left.\begin{aligned}\dot{L}=\frac{\partial \bar{R}'}{\partial l},\quad \dot{l}=-\frac{\partial \bar{R}'}{\partial L},\\ \dot{G}=\frac{\partial \bar{R}'}{\partial g},\quad \dot{g}=-\frac{\partial \bar{R}'}{\partial G},\\ \dot{H}=\frac{\partial \bar{R}'}{\partial h},\quad \dot{h}=-\frac{\partial \bar{R}'}{\partial H},\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}'=\bar{R}+\frac{\mu'^2}{2L^2}=\frac{1}{2L^2}+\mu\left(\frac{1}{\Delta}-r\cos H^*-\frac{1}{r}\right)\\ =\bar{R}'_0+\mu\bar{R}'_1.\end{aligned}\tag{6}$$

由于 $\mu'=1$，所以这里的德洛納变量为

$$\left.\begin{aligned} &L=\sqrt{a}, && l=n(t+\beta_1)=nt+\mu_0, \\ &G=\sqrt{a(1-e^2)}, && g=\omega, \\ &H=\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, && h=\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由于我們把月球繞地球运动的軌道看作圓形，因而角速度 $n'=$常数．但

$$n'^2a'^3=G=1,$$

其中 a' 为月球軌道半徑，在这里也等于 1，故得 $n'=1$，所以月球的經度 $l'=n't=t$（設以 $t=0$ 时为經度起算点）。

在摄动函数 $\bar{R}'$ 的表达式(6)中，我們可以看到它是与經度起算点无关的，只同月球和月球火箭之間的相对位置有关。但是 $\bar{R}$ 又是德洛納变量的函数，而德洛納变量中只有 $h=\Omega$ 与經度起算点有关（Ω 是从經度起算点到交点的角距）。另外，$\bar{R}$ 还包含月球的德洛納变量，那里只有經度 $l'=t$ 与經度起算点有关。显然，$h-t$ 就与經度起算点无关，所以 $\bar{R}$ 也必然仅为 $h-t$ 的函数。我們可以令 $h'=h-t$ 为新变量，这相当于把經度起算点放在月球位置上。h' 是 h 的綫性函数，設对应的正則共軛变量为 H'，則因

$$\frac{\partial(H', h')}{\partial(H, h)}=\frac{\partial H'}{\partial H}=1,$$

其中可取 $H'=H$，而因 $\dot{h}'=\dot{h}-1$，所以哈密尔頓函数也要略加修正。設新的哈密尔頓函数为 F，显然 $F=\bar{R}+H'$ 就行了，于是运动方程成为

$$\left.\begin{aligned} &\dot{L}=\frac{\partial F}{\partial l}, && \dot{l}=-\frac{\partial F}{\partial L}, \\ &\dot{G}=\frac{\partial F}{\partial g}, && \dot{g}=-\frac{\partial F}{\partial G}, \\ &\dot{H}'=\frac{\partial F}{\partial h'}, && \dot{h}'=-\frac{\partial F}{\partial H'}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中

$$F=F_0+\mu F_1, \quad F_0=\frac{1}{2L^2}+H, \quad F_1=\bar{R}_1'. \tag{9}$$

还可以利用上节結果，将它化成潘加来变量，而哈密尔顿函数不变。运动方程为

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{L} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda}, & \dot{\lambda} &= -\frac{\partial R}{\partial L}, \\
\dot{\xi} &= \frac{\partial R}{\partial \eta}, & \dot{\eta} &= -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \\
\dot{p} &= \frac{\partial R}{\partial q}, & \dot{q} &= -\frac{\partial R}{\partial p},
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
& R = F = R_0 + \mu R_1, \\
& R_0 = F_0 = \frac{1}{2L^2} + H - \frac{1}{2L^2} + L - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + p^2 + q^2), \\
& R_1 = F_1 = \frac{1}{\Delta} - r\cos H' - \frac{1}{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

上面所得的三种形式运动方程，即 (5)，(8)，(10) 式都是正則方程，其中 μ 为月球质量，它总是个小量，当 $\mu=0$ 时，便成为二体問題，可以直接求解；当 $\mu \neq 0$ 时，即为圓型限制性三体問題，以 μ 为小参数，称为小参数方程。

上面的討論虽然是属于月球火箭的运动方程，其实对于一般的圓型限制性三体問題也可适用。

习　　題

1．試用柏松括弧的定义和性质証明恒等式

$$\{U, \{V, W\}\} + \{V, \{W, U\}\} + \{W, \{U, V\}\} = 0.$$

2．試根据 (4-3-7) 式所列的10个积分証明它們之間所組成的柏松括弧的表是成立的。

3．試証：§8中定理1提出的条件，也是变量为正則共軛变量的必要条件。

4．試利用雅哥比的倒数关系証明 §8 中的定理 4。

5．若在求德洛納变量的过程中，假定 L 明显包含 t，則 L 的表达形式是否有改变。

6．若行星軌道为圆形，在某时刻 t_0，則行星擾动运动方程可簡化为怎样的形式。

第五章　摄动运动方程的解法

在第四章中，列出了以拉格朗日行星运动方程为基础的摄动运动方程。这些方程是摄动理論的基础。除了个别問題（如月球运动、特殊小行星运动）外，天体力学中得到解决的問題都是从它們出发的。

要严格地解出这些摄动运动方程是不可能的（已被潘加来等証明）。各种不同的解法都是去找最有利的近似解，这里主要介紹两种，即分析方法和数字方法。在分析方法中，是采用級数解，用幂級数和傅氏級数混合的多重級数来表示解的結果。本章主要讲古典方法（也就是針对大行星情况的方法），現代方法只能提一些輪廓，詳細內容將在专門化課內讲授。数字方法中主要讲天体力学常用的"外推法"。

§1　拉格朗日行星运动方程解法輪廓

在拉格朗日行星运动方程中，是用軌道根数为变量的。由于摄动行星质量很小，軌道根数变化很慢，以后的方法就是針对这个特点提出的。只要能得出可靠的近似解，利用第二章的星历表計算方法，很容易得到行星的位置。因此，問題的关鍵就是如何解拉格朗日方程。

根据第四章§6可知，拉格朗日行星运动方程为

$$\dot{a}=\frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0},$$

$$\dot{e}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}-\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0},$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
&\quad -\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}\right), \\
\dot{\tilde{\omega}} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}, \\
\dot{\Omega} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}, \\
\dot{\varepsilon}_0 &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i} \\
&\quad +\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

这是六阶常微分方程組，包含六个变量 a, Ω, e, i, $\tilde{\omega}$, ε_0，自变量为时間 t. 在方程組右端，n 卽为 a 的函数，其中还包含了被摄动行星的质量 m。摄动函数 R 为

$$
\left.
\begin{aligned}
R &= Gm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right) \\
&= Gm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r\cos H}{r'^2}\right),
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

其中

$$
\Delta^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.
$$

x, x', y, y', z, z' 为被摄动行星和摄动行星的直角坐标；r, r' 为向徑，H 为两行星在太阳处的張角。所有这些量都可以写成軌道根数的函数，另外还包含摄动行星的质量 m'. 因此，总的說来，方程 (1) 的右端为被摄动行星和摄动行星的軌道根数的函数。摄动行星的軌道根数也在变化，如果我們只局限于討論三体問題，則两行星軌道根数变化仅由于它們之間的相互吸引，于是摄动行星的运动方程与 (1) 式完全相同，只是把两行星的軌道根数和质量互

相交换。根据上面的符号，也就是把原来的 $a, e, \cdots, \varepsilon_0, m$ 与 $a', e', \cdots, \varepsilon_0', m'$ 互相交换，摄动函数也由 R 换为

$$R'=Gm\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{x'x+y'y+z'z}{r^3}\right)=Gm\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r'\cos H}{r^2}\right). \tag{3}$$

为簡单起见，我們用 p_i 代表被摄动行星的軌道根数，q_i 代表摄动行星的軌道根数，則由(1)式可写为

$$\dot{p}_i=m'F(p, q, t), \quad \dot{q}_i=mG(p, q, t) \tag{4}$$

(质量因子写在外面)，其中 $i=1, 2, \cdots, 6$。也就是說，如果要完全解决三体問題的摄动，必须解出(4)式的 12 个方程。

首先，我們可以注意，(1)式右端有行星质量 m, m'，而且在摄动函数中除 m 或 m' 因子外，在表示为軌道根数和时間 t 的函数时，也会出现行星平均运动 n, n'，其中也隐含着 m, m'。具体式子将在后面讲摄动函数展开时給出。m, m' 可作为方程組的参数。而在太阳系的情况下，行星质量同太阳比較都非常小。因此，如果把軌道根数按 m, m' 展开，这样的展开式一定收斂得很快。最初，哥西証明这样的展开式在 m, m' 和 t 充分小的情况下是收斂的。但在太阳系中行星质量都是固定数值，不可能任意小，因此这个定理不能适用。后来潘加来把这个哥西定理推广，得到一个較普遍的定理：若在 $t=0$ 时，两行星的軌道曲綫不相交，則对于一定的 m, m' 的值，存在一正值 t_0，当 $0<t<t_0$ 时，p, q 按 m, m' 乘冪展开的展开式为收斂。t_0 的值随 m, m' 的大小而定，m, m' 愈大，則 t_0 愈小❶，因此这样作是可以的。故我們可以令

$$\left.\begin{aligned} p_i&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_i^{(j,k)}m^jm'^k,\\ q_i&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}q_i^{(j,k)}m^jm'^k. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

❶ 参看 Poincaré 著：Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Tom. I, Chapt. II, p. 58～61.

(4)式右端的函数 $F(p, q, t)$，$G(p, q, t)$ 也可以展为相应的 m, m' 的冪級数。由馬克洛林公式得

$$\left.\begin{aligned} F(p, q, t) &= (F)_0 + m\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)_0 + m'\left(\frac{\partial F}{\partial m'}\right)_0 + \cdots, \\ G(p, q, t) &= (G)_0 + m\left(\frac{\partial G}{\partial m}\right)_0 + m'\left(\frac{\partial G}{\partial m'}\right)_0 + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

其中 $(X)_0$ 卽表示在 X 中命 m，m' 等于零。但 m, m' 隐含于 p, q 内，故可得

$$\frac{\partial F}{\partial m} = \sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial m} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial m}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial m'} = \sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial m'} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial m'}\right).$$

G 的相应式子相同。代入(6)式后，再以(5)式代入得

$$\left.\begin{aligned} F(p, q, t) = F[p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t] &+ m\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(1,0)} \right.\\ &\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(1,0)}\right] + m'\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(0,1)} \right.\\ &\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(0,1)}\right] + \cdots, \\ G(p, q, t) = G[p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t] &+ m\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(1,0)} \right.\\ &\left. + \left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(1,0)}\right] + m'\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(0,1)} \right.\\ &\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(0,1)}\right] + \cdots. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

以(5)，(7)式代入(4)式卽得

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^{(0,0)} &+ m\dot{p}_i^{(1,0)} + m'\dot{p}_i^{(0,1)} + m^2\dot{p}_i^{(2,0)} + mm'\dot{p}_i^{(1,1)} \\ &+ m'^2\dot{p}_i^{(0,2)} + \text{高次項} = m'F[p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t] \\ &+ mm'\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(1,0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(1,0)}\right] \end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+m'^2 \sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(0,1)}+\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(0,1)}\right]\\
&+\text{高次項},\\
&\dot{q}_i^{(0,0)}+m\dot{q}_i^{(1,0)}+m'\dot{q}_i^{(0,1)}+m^2\dot{q}_i^{(2,0)}+mm'\dot{q}_i^{(1,1)}\\
&\quad+m'^2\dot{q}_i^{(0,2)}+\text{高次項}=mG[p^{(0,0)},\ q^{(0,0)},\ t]\\
&\quad+m^2\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(1,0)}+\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(1,0)}\right]\\
&\quad+mm'\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(0,1)}+\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(0,1)}\right]\\
&\quad+\text{高次項}。
\end{aligned}\right\}\tag{8}
$$

比較两端 m, m' 的系数得

$$
\dot{p}_i^{(0,0)}=0,\qquad \dot{q}_i^{(0,0)}=0;\tag{9}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{p}_i^{(1,0)}=0,\qquad \dot{q}_i^{(0,1)}=0,\\
&\dot{p}_i^{(0,1)}=F[p^{(0,0)},\ q_i^{(0,0)},\ t],\\
&\dot{q}_i^{(1,0)}=G[p^{(0,0)},\ q^{(0,0)},\ t];
\end{aligned}\right\}\tag{10}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{p}_i^{(2,0)}=0,\qquad \dot{q}_i^{(0,2)}=0,\\
&\dot{p}_i^{(1,1)}=\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(1,0)}+\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(1,0)}\right],\\
&\dot{q}_i^{(1,1)}=\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(0,1)}+\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(0,1)}\right],\\
&\dot{p}_i^{(0,2)}=\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(0,1)}+\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(0,1)}\right],\\
&\dot{q}_i^{(2,0)}=\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)_0 p_i^{(1,0)}+\left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)_0 q_i^{(1,0)}\right].
\end{aligned}\right\}\tag{11}
$$

由此类推可得高次項的式子，問題就归結到解(9)，(10)，(11)等方程組。

由(9)式可知 $p_i^{(0,0)}$, $q_i^{(0,0)}$ 为常数，如果以后的 m, m' 各項都不考慮，即为二体問題。大家知道，二体問題的軌道根数是常数，一般就取为 t 等于历元 t_0 时的值，簡单地記为 $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$，共 12 个。

在解(10)，(11)式时，又要出現新的积分常数，而且可以看出：由于 p_i, q_i 为 m, m' 的无穷級数，可得无穷多个积分常数。可是方程組(4)式的完全解只要求有12个积分常数，而用(9)式已有12个了，因此，其余的积分常数一定能表为这12个积分常数的函数，事实正是这样。

由(4)式可知，$\dot{p}_i$ 有 m' 的因子，$\dot{q}_i$ 有 m 的因子，显然可推論出

$$\dot{p}_i^{(j,0)}=\dot{q}_i^{(0,k)}=0.$$

其中 $j, k=1, 2, 3, \cdots, \infty$。它們的积分常数可設为 $a_i^{(j,0)}$ 和 $b_i^{(0,k)}$，即

$$p_i^{(j,0)}=a_i^{(j,0)},\quad q_i^{(0,k)}=b_i^{(0,k)}. \tag{12}$$

至于 $p_i^{(j,k)}$ $(k\neq 0)$, $q_i^{(j,k)}$ $(j\neq 0)$ 的积分常数，由于 $\dot{p}_i^{(j,k)}$, $\dot{q}_i^{(j,k)}$ 的右端式子中除 t 外，其余都是常数，因此可以直接积分，积分后令积分常数为 $-a_i^{(j,k)}$, $-b_i^{(j,k)}$，得

$$\left.\begin{aligned} p_i^{(j,k)}&=f_i^{(j,k)}(t)-a_i^{(j,k)} \quad (k\neq 0),\\ q_i^{(j,k)}&=g_i^{(j,k)}(t)-b_i^{(j,k)} \quad (j\neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

以(12)，(13)代入(5)式得

$$p_i=\sum_{j=0}^{\infty}a_i^{(j,0)}m^j+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}[f_i^{(j,k)}(t)-a_i^{(j,k)}]m^jm'^k,$$

$$q_i=\sum_{k=0}^{\infty}b_i^{(0,k)}m'^k+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}[g_i^{(j,k)}(t)-b_i^{(j,k)}]m^jm'^k.$$

令 $t=t_0$，并比較两端 m, m' 的系数得

$$\left.\begin{aligned} &p_i^{(0,0)}=p_i^{(0)}, \qquad q_i^{(0,0)}=q_i^{(0)};\\ &a_i^{(j,0)}=b_i^{(0,k)}=0 \quad (j, k=1, 2, \cdots, \infty),\\ &a_i^{(j,k)}=f_i^{(j,k)}(t_0) \quad (k\neq 0),\\ &b_i^{(j,k)}=g_i^{(j,k)}(t_0) \quad (j\neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由(14)式可看出，所有的积分常数都可以用 $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ 表示出来，故积分常数方面的問題解决了，剩下的問題是具体地解(9)，(10)，

(11)式等。

若只考虑(9)式是无摄动情形，在前面已說过。如果只考虑行星质量的一次幂項，叫一阶摄动，方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_i^{(0,1)} &= F[p^{(0)}, q^{(0)}, t], \\ \dot{q}_i^{(1,0)} &= G[p^{(0)}, q^{(0)}, t]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

方程右端除 t 外都是常数，具体形式就是(1)式，可以毫不困难地直接进行积分，求出 $p_i^{(0,1)}$, $q_i^{(1,0)}$. 由于在(14)中，积分常数为 $t=t_0$ 时的值，故可以把积分下限取为 t_0，上限为 t 就行了，而在积分以前需要把 F, G 表为 t 的显函数才能积分。由(1)式可知，主要問题是把摄动函数表为 t 的显函数，这就需要把摄动函数展开，才能得到 t 的显函数形式(具体展开方法将在后面几节讲述)，积分后就得到 $p_i^{(0,1)}$, $q_i^{(1,0)}$ 的解。于是

$$\left.\begin{aligned} p_i &= p_i^{(0)} + m' p_i^{(0,1)}, \\ q_i &= q_i^{(0)} + m\, q_i^{(1,0)}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

如果要考虑到 m, m' 的二次幂項，叫二阶摄动，需要解出方程組(11)式。由前面的积分常数討論可知 $p_i^{(2,0)} = q_i^{(0,2)} = 0$，故只需要求出 $p_i^{(1,1)}$, $q_i^{(1,1)}$, $p_i^{(0,2)}$, $q_i^{(2,0)}$. 它們对时間 t 的微商也只是 t 的函数，除 t 外其余各量都是常数。其中 $p_i^{(0,1)}$, $q_i^{(1,0)}$ 是(15)式的解，故也可以直接积分。与前面一样，积分下限取为 t_0，上限取为 t. 被积函数也要表示为 t 的显函数，这比一阶摄动要繁得多，可是并沒有别的困难。得到了它們的解以后，可求得二阶摄动的軌道根数：

$$\left.\begin{aligned} p_i &= p_i^{(0)} + m' p_i^{(0,1)} + mm' p_i^{(1,1)} + m'^2 p_i^{(0,2)}, \\ q_i &= q_i^{(0)} + m q_i^{(1,0)} + mm' q_i^{(1,1)} + m^2 q_i^{(2,0)}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

如果二阶摄动还不够，需要高阶摄动，也可以由前面的方法继續推出。在数学上已經沒有問題，甚至可以逐步推出任何阶摄动，只是步驟更繁。在討論行星和小行星运动时，因为行星和小行星

的质量比太阳小得多,一般只要一阶摄动就行了,个别情况也只要二阶摄动。

上面只是討論三体問題的摄动理論,如果討論行星 P_1 的运动时,同时要考虑另外两行星 P_2, P_3 对它的影响,就要四体問題的摄动理論。这并不增加什么困难,不过更麻煩一些。运动方程也完全一样,只是摄动函数变为两項;如果設 m_1, m_2, m_3 为三行星质量,p_i, q_i, r_i 与各行星的軌道根数,可以写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}_i&=m_2F_i(p,q,t)+m_3F_i(p,r,t),\\ \dot{q}_i&=m_1G_i(q,p,t)+m_3G_i(q,r,t),\\ \dot{r}_i&=m_1H_i(r,p,t)+m_2H_i(r,q,t).\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

同样可以先把 p_i, q_i, r_i 展开为 m_1, m_2, m_3 的冪級数,然后再代入(18)式比較 m_1, m_2, m_3 的系数。令

$$\left.\begin{aligned}p_i&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}p_i^{(j,k,l)}m_1^j\,m_2^k\,m_3^l,\\ q_i&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}q_i^{(j,k,l)}m_1^j\,m_2^k\,m_3^l,\\ r_i&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}r_i^{(j,k,l)}m_1^j\,m_2^k\,m_3^l.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

与三体問題討論一样,可用馬克洛林級数将(18)式右端展开为 m_1, m_2, m_3 的級数;左端用(19)式代入,即得 $p_i^{(j,k,l)}$ 的具体式子。其余的討論与前面三体問題情况完全相同,在这里不詳細讲。

至于五体問題和多体問題的摄动理論,可以照样推广。对于大行星的运动,目前的理論都是考虑九体問題。

由上面可知摄动理論在数学意义上是沒有什么問題了,但是在天体力学上还沒有解决,因为还沒有把解的具体式子写出来。要作到这点,正如前面提过的,需要把摄动函数展开成 t 的显函数,这就是后面几节的内容。

§2　摄动函数展开方法的輪廓

从上节我們已經知道，要解出拉格朗日行星运动方程，問題就是展开摄动函数为时間 t 的显函数，其中被摄动行星和摄动行星的軌道根数都作为常数。只要把这个展开式求出后，代入拉格朗日行星运动方程，直接进行积分就可以得到一阶摄动。如需要求二阶或高阶摄动，就可以根据所求得的一阶摄动逐步求出。

要展开摄动函数为时間 t 的显函数，就需要把其中所有同 t 有关的量一起展开。但在軌道根数为常数时，在椭圓运动中，只有各种近点角是 t 的函数，其余各量都可以用它們来表示。各种近点角中只有平近点角 $M=nt+M_0$ 为 t 的显函数，偏近点角和眞近点角都可以表示成为 M 的級数，因此，把摄动函数展开成为 M 的級数，問題就解决了。下面我們就来談展开的步驟。

1．摄动函数 R 为

$$R=Gm'\left(\frac{1}{\varDelta}-\frac{r\cos H}{r'^2}\right), \tag{1}$$

其中 Gm' 为常数。如果同时考虑好几个行星的摄动，R 就应該有好几項，但每項的形式完全一样。故要能把(1)式展开，其他各項的展开式完全相同，只是符号换一下而已。(1)式中 $\varDelta$ 为两行星的实际距离，具体式子为

$$\varDelta^2=r^2+r'^2-2rr'\cos H. \tag{2}$$

我們可以看出，只要能展开摄动函数的第一項，即 $\varDelta^{-1}$（这項我們称为摄动函数的主要部分）。后面一項可用同样方法展开（这項称为輔助部分）。摄动函数展开的基本問題是展开它的主要部分。

图 22 表示黄道和两行星軌道在天球上的投影。各符号上带有“ ′ ”的表示摄动行星的量，沒有的为被摄动行星。其中♈为春

分点，Ω 为轨道升交点，Π 为近日点，I 为两轨道交点，M 为行星在某时刻 t 时的位置。因为 H 为两行星在太阳处的张角，而天球

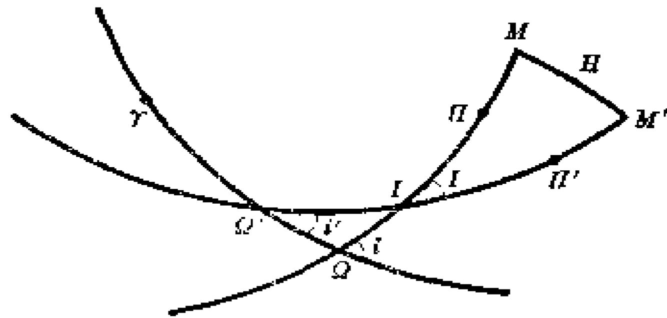


图 22

中心又取在太阳处，所以 MM' 間的大圓弧卽为 H。在三角形 IMM' 中，ΠM 卽为眞近点角，故

令
$$\left.\begin{array}{lll} \Pi M=f, & \Pi'M'=f', & \\ I\Pi=\Pi, & I\Pi'=\Pi', & I=\angle MIM'. \end{array}\right\} \tag{3}$$

由球面三角公式可得

$$\cos H=\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi') \\ +\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\cos I. \tag{4}$$

其中 Π, Π', I 还不知道．但在三角形 $I\Omega\Omega'$ 中，三个角分別为 I, i', $180°-i$；三个边为

$$\Omega'I, \quad \Omega I \quad 和 \quad \Omega'\Omega.$$

若令
$$\Phi=\Omega I, \qquad \Phi'=\Omega' I,$$

则
$$\Phi=\Omega I=\Omega\Pi-I\Pi=\omega-\Pi,$$

同样
$$\Phi'=\omega'-\Pi'.$$

因
$$\Omega'\Omega=\Omega-\Omega',$$

则在这个三角形中，由于 i, i', Ω, Ω' 为轨道根数，可作为已知，其余 I, Φ, Φ' 可用球面三角公式求出。这里最方便是利用达朗貝尔公式，可得

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\frac{I}{2}\sin\frac{\Phi'+\Phi}{2}=\sin\frac{\Omega-\Omega'}{2}\sin\frac{i+i'}{2},\\
&\sin\frac{I}{2}\cos\frac{\Phi'+\Phi}{2}=\cos\frac{\Omega-\Omega'}{2}\sin\frac{i-i'}{2},\\
&\cos\frac{I}{2}\sin\frac{\Phi'-\Phi}{2}=\sin\frac{\Omega-\Omega'}{2}\cos\frac{i+i'}{2},\\
&\cos\frac{I}{2}\cos\frac{\Phi'-\Phi}{2}=\cos\frac{\Omega-\Omega'}{2}\cos\frac{i-i'}{2}.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

根据(5)式可以求出 I, Φ, Φ'，再由

$$\Pi=\omega-\Phi,\qquad \Pi'=\omega'-\Phi',\tag{6}$$

就可以求出 Π, Π'. 于是在(4)式右端各量中，除 f, f' 外都是常数。

在行星的情况中，轨道倾角 i, i' 都很小，若使

$$\cos I=1-2\sin^2\frac{I}{2},$$

则 $\sin^2\dfrac{I}{2}$ 是很小的量，(4)式可以写为

$$\left.\begin{aligned}
\cos H&=\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')\\
&\quad+\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\cos I\\
&=\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\\
&\quad-2\lambda^2\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi'),\\
\text{其中}\quad \lambda^2&=\sin^2\frac{I}{2}.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

以(7)式代入(2)式得

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2&=r^2+r'^2-2rr'[\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\\
&\qquad-2\lambda^2\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')]\\
&=[r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi')]\\
&\quad\times\left[1+\frac{4rr'\lambda^2\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')}{r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi')}\right]\\
&=\Delta_1^2[1+4rr'\Delta_1^{-2}\lambda^2\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')],\\
\text{其中}\quad \Delta_1^2&=r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi').
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

因此

$$\Delta^{-1}=\Delta_1^{-1}[1+4rr'\lambda^2\Delta_1^{-2}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (9)$$

在太阳系各行星的情况中，λ 很小，而且 Δ_1（行星之間距在黄道面上的投影）都相当大，可以有

$$|4rr'\lambda^2\Delta_1^{-2}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')|<1,$$

因此(9)式可以用二项式定理进行展开。

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{-1}=&\Delta_1^{-1}[1-2rr'\lambda^2\Delta_1^{-2}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\\&+6r^2r'^2\lambda^4\Delta_1^{-4}\sin^2(f+\Pi)\sin^2(f'+\Pi')\\&-\cdots]\\=&\Delta_1^{-1}-2rr'\lambda^2\Delta_1^{-3}\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\\&+6r^2r'^2\lambda^4\Delta_1^{-5}\sin^2(f+\Pi)\sin^2(f'+\Pi')\\&-20r^3r'^3\lambda^6\Delta_1^{-7}\sin^3(f+\Pi)\sin^3(f'+\Pi')\\&+\cdots.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

以后的問題就是把(10)右端各量展开为 M 的級数。在(10)式中，我們可以看出，如果两行星的軌道偏心率 $e=e'=0$，則(10)式右端

$$r=a,\quad r'=a',\quad f=M,\quad f'=M',$$

問題基本解决，只要把各項表示为 M，M' 的三角級数就行了。在行星运动中，偏心率虽然不等于零，但都比較小，可以利用这个特点。

2. (10)式各項

$$\Delta_1^{-1},\ rr'\Delta_1^{-3},\ r^2r'^2\Delta_1^{-5},\ \cdots,\ (rr')^k\Delta_1^{-(2k+1)},\ \cdots,$$

都是 r，r' 的齐次函数，因

$$\Delta_1=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi')}$$

为 r，r' 的一次齐次函数，故 Δ_1^{-1}，Δ_1^{-3}，$\cdots$ 分别为 r，r' 的 -1，-3，$\cdots$ 次齐次函数，乘上前面 r，r' 的因子后都是 -1 次齐次函数。

当偏心率 $e=e'=0$ 时，各項成为（不管数字系数）

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^{2k}(aa')^k\Delta_0^{-(2k+1)}\sin^k(M+H)\sin^k(M'+H'),\\ \text{其中}\quad&\Delta_0^2=a^2+a'^2-2aa'\cos(M-M'+H-H').\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

(11)式容易展开成 M, M' 的三角級数，具体的展开方法将在下节叙述。

在太阳系各行星的情况中，偏心率都很小，因此可以利用偏心率作小量，按二元馬克洛林級数进行展开。但(10)式各項中同 e, e' 有关的量有两种，即向徑 r, r' 和真近点角 f, f'. 当然，向徑 r, r' 也可以表为 e, e' 和 f, f' 的函数，但是在求它們对 e, e' 的偏微商时有很多麻煩，現在我們把它們分开来考慮。令

$$\left.\begin{aligned}&r=a(1+x), &&r'=a'(1+x'),\\ &x=-e\cos E, &&x'=-e'\cos E',\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

則 x, x' 为与 e, e' 同数量級的小量。我們可以把包含 r, r' 的項按 x, x' 的冪展开，由于各項都是 r, r' 的負一次齐次函数，設为 $F(r, r')$，則

$$F(r, r')=F[(a+ax),\ (a'+a'x')].$$

由齐次函数的性质知有

$$F(pr, pr')=\frac{1}{p}F(r, r'),$$

即
$$F(r, r')=pF(pr, pr').$$

令 $p=\dfrac{1}{1+x'}$，則得

$$\begin{aligned}F(r, r')&=F(a+ax,\ a'+a'x')\\ &=\frac{1}{1+x'}F\left(\frac{a+ax}{1+x'},\ a'\right)\\ &=\frac{1}{1+x'}F\left[a+\frac{a(x-x')}{1+x'},\ a'\right].\end{aligned}\tag{13}$$

而 $\dfrac{x-x'}{1+x'}$ 也是与 e, e' 同数量級的量，可以用它作为小量，按泰勒級数进行展开，即

$$F\left[a+\frac{a(x-x')}{1+x'}, a'\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial a^n}[F(a, a')]. \qquad (14)$$

因此

$$F(r, r')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{(x-x')^n}{(1+x')^{n+1}}\frac{\partial^n}{\partial a^n}F(a, a'). \qquad (15)$$

在 $F(a, a')$ 中，包含 f, f' 的三角函数，a, a' 的函数以及 λ^{2k}。可以不管 a, a' 及 λ，因为它們与时間无关。f, f' 同时間 t 有关，以两种形式出現：一种是在 Δ_1 中，卽

$$\cos(f-f'+\Pi-\Pi');$$

另一种为

$$\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi').$$

但由于

$$2\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')$$
$$=\cos(f-f'+\Pi-\Pi')-\cos(f+f'+\Pi+\Pi'),$$

故两种形式可以統一。为了要展开为 M, M' 的級数，令

$$f=M+y, \qquad f'=M'+y'. \qquad (16)$$

因此

$$\cos(f\pm f'+\Pi\pm\Pi')$$
$$=\cos(M\pm M'+\Pi\pm\Pi'+y\pm y')$$
$$=\cos(M\pm M'+\Pi\pm\Pi')(\cos y\cos y'\mp\sin y\sin y')$$
$$-\sin(M\pm M'+\Pi\pm\Pi')(\sin y\cos y'\pm\sin y'\cos y), \qquad (17)$$

一起代入 $F(a, a')$ 中，就得到 M, M' 的級数。但系数中还包含有 y, y' 的三角函数，可以整理为

$$\sin hy, \quad \sin ky', \quad \cos hy, \quad \cos ky'$$

的形式。因为

$$(x-x')^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^n c_n^i x^{n-i}x'^i,$$

故(15)式中齐次項除 M, M' 的三角函数和常数外，剩下的量可表示为下列四种形式(不管常数系数)：

$$\left.\begin{aligned} L&=x^{n-i}\sin hy, & L_1&=x^{n-i}\cos hy,\\ L'&=\frac{x'^i\sin ky'}{(1+x')^{n+1}}, & L_1'&=\frac{x'^i\cos ky'}{(1+x')^{n+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

这四种形式是 x, x', y, y' 的函数，我們可以展开成 e, e' 的冪級数；系数为 M, M' 的三角級数，具体展开方法在后面再讲。

这样一来，我們就可以得到摄动函数的具体展开式，但其中有两个地方还需要解决，一个是把

$$(aa')^k[a^2+a'^2-2aa'\cos(f-f'+\Pi-\Pi')]^{-\frac{2k+1}{2}}$$

展开成 $f-f'+\Pi-\Pi'$ 的三角級数。另一个是把(18)式中提出的 L, L', L_1, L_1' 四个函数展开为 e, e' 的冪級数和 M, M' 的三角級数。这两个問題将在后面两节讲述。这两个問題解决后，剩下問題就是把各 M, M' 的級数統一整理成三角級数。由于

$$M=nt+M_0,\quad M'=n't+M_0',\tag{19}$$

故这样的三角級数就是 t 的显函数了，很容易对自变量 t 进行积分，于是全部問題解决。

3. 上面的方法是展开摄动函数为 M 的显函数，有时要变换为偏近点角 E 或真近点角 f. 如果用 q 代表任何軌道根数，則拉格朗日行星运动方程可形式上写为

$$\frac{dq}{dt}=F(q,\ R),\tag{20}$$

其中 R 即为摄动函数。如把自变量改为 E，則得

$$\frac{dq}{dE}=\frac{dq}{dt}\cdot\frac{dt}{dE}=F(q,\ R)\frac{dt}{dE},\tag{21}$$

而 $\frac{dt}{dE}$ 很容易表示成 E 的函数，即

$$\frac{dt}{dE}=\frac{1}{n}(1-e\cos E).\tag{22}$$

这样一来，就可以把摄动函数展开成 E 的三角函数，这是紐康

(Newcomb)和韓申所用的方法。有时这个方法要方便些，但要把 E' 表示成 E 的函数非常麻煩。

同样也可以用 f 作自变量，并相应地把摄动函数展开成 f 的三角級数。这是格耳登的方法。

如果把摄动函数展开为 E 的三角級数，收斂范圍要比 M 的三角級数大些，而展为 f 的三角級数则更大。

§3 拉普拉斯系数和它的应用

上节所讲的摄动函数展开方法中，有两个問題还要解决。这一节先讲第一个問題，即展开

$$\left.\begin{aligned}&(aa')^k(a^2+a'^2-2aa'\cos H_1)^{-\frac{2k+1}{2}},\\&H_1=f-f'+\Pi-\Pi'\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

为 H_1 的三角級数。下面逐步导出。

1. 若 $a'>a$，令 $\alpha=\frac{a}{a'}<1$；若 $a>a'$，则令 $\alpha=\frac{a'}{a}<1$。现在暂假定是

$$a'>a,\quad \alpha=\frac{a}{a'}<1.$$

并令

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha^k}{a'^{s}}D^{-s}=(aa')^k(a^2+a'^2-2aa'\cos H_1)^{-\frac{2k+1}{2}},\\ &\text{即}\quad D^{-s}=(1+\alpha^2-2\alpha\cos H_1)^{-\frac{2k+1}{2}}\\&\qquad\quad=(1+\alpha^2-2\alpha\cos H_1)^{-s},\\ &\text{其中}\quad s=\frac{2k+1}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

故 s 表示任一奇数除以 2. 再令

$$\text{则}\quad\left.\begin{aligned}&z=\exp(\sqrt{-1}H_1),\\&2\cos H_1=z+z^{-1}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

代入(2)式后得

$$
\begin{aligned}
D^{-s} &= (1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1})^{-s} \\
&= (1-\alpha z)^{-s}(1-\alpha z^{-1})^{-s}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

根据 z 的定义，$|z|=1$，而 $|\alpha|<1$，故 $|\alpha z|<1$。因此可用二项式定理

$$
(1-\alpha z)^{-s}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\alpha^n z^n, \tag{5}
$$

$$
(1-\alpha z^{-1})^{-s}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\alpha^n z^{-n}. \tag{6}
$$

由于(5)，(6)式中 z^n 和 z^{-n} 的系数相同，故代入(4)式后应为

$$
D^{-s}=\frac{1}{2}B_0^s+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^s(z^n+z^{-n}), \tag{7}
$$

其中

$$
\frac{1}{2}B_0^s=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^2(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+n-1)^2}{(n!)^2}\alpha^{2n}, \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}B_n^s &= \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\alpha^n \times \\
&\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{s(s+1)\cdots(s+m-1)(s+n)\cdots(s+n+m-1)}{m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\alpha^{2m}\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

(7)式显然可以写成

$$
D^{-s}=\frac{1}{2}B_0^s+\sum_{n=1}^{\infty}B_n^s\cos nH_1, \tag{10}
$$

这就把 D^{-s} 展开成了 H_1 的三角級数。如果定义

则有

$$
\left.
\begin{aligned}
&B_{-n}^s=B_n^s, \\
&D^{-s}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^s z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^s\cos nH_1.
\end{aligned}
\right\}
\tag{11}
$$

2．上面所得到的 B_n^s 就叫做拉普拉斯系数。根据超几何級数的定义

$$\left.\begin{aligned}&F(A,B,C,x)\\&\quad=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A(A+1)\cdots(A+n-1)\cdot B(B+1)\cdots(B+n-1)}{n!C(C+1)\cdots(C+n-1)}x^n,\\&\text{因此}\\&\quad\frac{1}{2}B_n^s=\frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\alpha^nF(s,\ s+n,\ n+1,\ \alpha^2).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

关于超几何級数，可以有特制的表去査，只是很难找到恰当的表，我們可以根据它的性质得到另外的形式。

根据(10)式，B_n^s 可用傅里哀系数的形式表示，

$$\begin{aligned}B_n^s&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D^{-s}\cos nH_1\,dH_1\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nH_1\,dH_1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos H_1)^s}.\end{aligned}\tag{13}$$

但从(9)式中，令 $s=\frac{1}{2}$ 时有

$$\frac{1}{2}B_n^{\frac{1}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2m-1)\cdot1\cdot3\cdots(2n+2m-1)}{2^m(m!)\cdot2^{n+m}(n+m)!}\alpha^{n+2m}.\tag{14}$$

根据著名的瓦里斯(Wallis)公式知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^{2k}H_1\,dH_1=\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{2^k(k!)},\tag{15}$$

因此(14)式可以写成

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}B_n^{\frac{1}{2}}&=\int_0^{\pi}\alpha^n\sin^{2n}H_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}}{m!}\alpha^{2m}\sin^{2m}H_1\,dH_1\\&=\alpha^n\int_0^{\pi}\sin^{2n}H_1(1-\alpha^2\sin^2H_1)^{-\frac{1}{2}}dH_1\\&=\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}H_1\,dH_1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2H_1}},\end{aligned}$$

因此

$$B_n^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n}H_1\,dH_1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2H_1}}.\tag{16}$$

但由(13)式知，在 $s=\frac{1}{2}$ 时，有

$$B_n^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nH_1\,dH_1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos H_1}}, \tag{17}$$

同(16)式比較我們可以得到一个有意义的公式

$$\int_0^\pi \frac{\cos nH_1\,dH_1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos H_1}}=\alpha^n\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}H_1\,dH_1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 H_1}}. \tag{18}$$

在(16)式的結果中，当 $n=0$ 和 $n=1$ 时，可以用椭圓函数来表示。由(16)式

$$B_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dH_1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 H_1}}=\frac{4}{\pi}F(\alpha), \tag{19}$$

其中 $F(\alpha)$ 表示第一类完全椭圓函数。

又

$$\begin{aligned}B_1^{\frac{1}{2}}&=\frac{2}{\pi}\alpha\int_0^\pi \frac{\sin^2 H_1\,dH_1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 H_1}}\\&=\frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 H_1\,dH_1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 H_1}}\\&=\frac{4}{\pi\alpha}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dH_1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 H_1}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 H_1}\,dH_1\right]\\&=\frac{4}{\pi\alpha}[F(\alpha)-E(\alpha)],\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $E(\alpha)$ 即为第二类完全椭圓函数。

3．現在我們再来討論一下拉普拉斯系数的性质。根据

$$D^{-s}=(1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1})^{-s}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^s z^n \tag{21}$$

对 z 求微商得

$$\alpha s(1-z^{-2})(1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1})^{-s-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}nB_n^s z^{n-1}, \tag{22}$$

即

$$\alpha s(z-z^{-1})\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^s z^n=[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}nB_n^s z^n. \tag{23}$$

比較(23)式两端 z^{n-1} 的系数可得

$$\alpha s(B^s_{n-2}-B^s_n)=(n-1)(1+\alpha^2)B^s_{n-1}-\alpha[(n-2)B^s_{n-2}+nB^s_n],$$

故得

$$B^s_n=\frac{n-1}{n-s}(\alpha+\alpha^{-1})B^s_{n-1}-\frac{n+s-2}{n-s}B^s_{n-2}. \tag{24}$$

根据(24)式我們就可以从 B^s_{n-1}, B^s_{n-2} 来推出 B^s_n。因此，只要知道相邻两个 B^s_n 的值，所有其他的值都可以推出。

对于不同的 s，我們也可以找出它們之間的关系。(22)式可写为

$$\alpha s(1-z^{-2})\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B^{s+1}_n z^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}nB^s_n z^{n-1}. \tag{25}$$

比較两端 z^{n-1} 的系数可得

$$nB^s_n=\alpha s(B^{s+1}_{n-1}-B^{s+1}_{n+1}). \tag{26}$$

在(24)中令 $n=n+1$, $s=s+1$，則得

$$B^{s+1}_{n+1}=\frac{1}{n-s}[n(\alpha+\alpha^{-1})B^{s+1}_n-(n+s)B^{s+1}_{n-1}],$$

代入(26)式即得

$$B^s_n=\frac{s}{n-s}[2\alpha B^{s+1}_{n-1}-(1+\alpha^2)B^{s+1}_n]. \tag{27}$$

在其中令 $n=n+1$ 即得

$$B^s_{n+1}=\frac{s}{n-s+1}[2\alpha B^{s+1}_n-(1+\alpha^2)B^{s+1}_{n+1}]. \tag{28}$$

在(26)，(27)，(28)式中消去 B^{s+1}_{n-1} 和 B^{s+1}_{n+1} 得

$$B^{s+1}_n=\frac{(n+s)(1+\alpha^2)B^s_n-2(n-s+1)\alpha B^s_{n+1}}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{29}$$

从(29)式我們可以看出：根据連續两个 s 的量，可以求 $s+1$ 的量。这样一来，只要知道 $s=\frac{1}{2}$ 时的連續两个拉普拉斯系数，則利用(24)，(29)式就可以求出所有的拉普拉斯系数。而根据(19)，(20)式，$B^{\frac{1}{2}}_0$，$B^{\frac{1}{2}}_1$ 可以用椭圓函数 $F(\alpha)$，$E(\alpha)$ 来表示，它們的值都可

查表得出。因此，求出所有的拉普拉斯系数就沒有困难了。

4．由上节知，所得到的 $F(a, a')$ 还要对 a 取各級偏微商。D^{-s} 的展开式是以 $\alpha=\frac{a}{a'}$ 为参数展开的，因此对 a 的偏微商可以写成对 α 的偏微商，只是差一个常数因子 $\frac{1}{a'}$。D^{-s} 对 α 的偏微商就是它的展开式系数 B_n^s 对 α 的微商。由

$$(1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1})^{-s}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^s z^n,$$

两端对 α 取微商得

$$-s(2\alpha-z-z^{-1})(1+\alpha^2-\alpha z-\alpha z^{-1})^{-s-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{dB_n^s}{d\alpha}z^n,$$

即
$$-s(2\alpha-z-z^{-1})\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^{s+1}z^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{dB_n^s}{d\alpha}z^n.$$

比較两端 z^n 的系数得

$$\frac{dB_n^s}{d\alpha}=s(B_{n-1}^{s+1}+B_{n+1}^{s+1}-2\alpha B_n^{s+1}). \tag{30}$$

此式是用 $s+1$ 的量来表示 s 的微商，可以利用以前的式子来进行轉换。在(29)式中，令 $n=n-1$ 得

$$B_{n-1}^{s+1}=\frac{(n+s-1)(1+\alpha^2)B_{n-1}^s-2\alpha(n-s)B_n^s}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{31}$$

在(24)式中令 $n=n+1$ 得

$$B_{n+1}^s=\frac{n}{n-s+1}(\alpha+\alpha^{-1})B_n^s-\frac{n+s-1}{n-s+1}B_{n-1}^s. \tag{32}$$

以(32)式代入(29)式即得

$$B_n^{s+1}=\frac{2\alpha(n+s-1)B_{n-1}^s-(n-s)(1+\alpha^2)B_n^s}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{33}$$

再在(33)式中，令 $n=n+1$ 得

$$B_{n+1}^{s+1}=\frac{2\alpha(n+s)B_n^s-(n-s+1)(1+\alpha^2)B_{n+1}^s}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{34}$$

以(31)，(33)，(34) 代入(30)式，即把 B_n^s 的微商表示成为 B_{n-1}^s，

B_n^s, B_{n+1}^s 的函数。再用(32)式消去 B_{n+1}^s 即得

$$\frac{dB_n^s}{d\alpha}=\frac{1}{1-\alpha^2}[2(n+s-1)B_{n-1}^s+\{2\alpha s-n(\alpha+\alpha^{-1})\}B_n^s]. \qquad (35)$$

根据(35)式就可以从已知的 B_{n-1}^s, B_n^s 求出 $\frac{dB_n^s}{d\alpha}$.

至于求高次微商，由(35)式得

$$(1-\alpha^2)\frac{dB_n^s}{d\alpha}=2(n+s-1)B_{n-1}^s+[2\alpha s-n(\alpha+\alpha^{-1})]B_n^s,$$

两端对 α 取微商得

$$\begin{aligned}(1-\alpha^2)\frac{d^2B_n^s}{d\alpha^2}-2\alpha\frac{dB_n^s}{d\alpha}\\ =2(n+s-1)\frac{dB_{n-1}^s}{d\alpha}+[2\alpha s-n(\alpha+\alpha^{-1})]\frac{dB_n^s}{d\alpha}\\ +[2s-n(1-\alpha^{-2})]B_n^s.\end{aligned} \qquad (36)$$

但在(35)式中，令 $n=n-1$ 得

$$\begin{aligned}\frac{dB_{n-1}^s}{d\alpha}=\frac{1}{1-\alpha^2}[2(n+s-2)B_{n-2}^s\\ +\{2\alpha s-(n-1)(\alpha+\alpha^{-1})\}B_n^s],\end{aligned} \qquad (37)$$

再根据(24)式得

$$(n+s-2)B_{n-2}^s=(n-1)(\alpha+\alpha^{-1})B_{n-1}^s-(n-s)B_n^s. \qquad (38)$$

在(35)，(36)，(37)，(38)四式中消去 B_{n-1}^s, $\frac{dB_{n-1}^s}{d\alpha}$, B_{n-2}^s 不难得到

$$\begin{aligned}(\alpha^2-\alpha^4)\frac{d^2B_n^s}{d\alpha^2}+[\alpha-\alpha^3(4s+1)]\frac{dB_n^s}{d\alpha}\\ -[4\alpha^2s^2+n^2(1-\alpha^2)]B_n^s=0.\end{aligned} \qquad (39)$$

根据(39)式，就可以从 B_n^s 和它的一級微商求出二級微商了。我們可以看出，(39)式实际上是 B_n^s 对 α 的一个二阶微分方程式，B_n^s 就是(39)式的解。根据(12)式知，B_n^s 可以表示为超几何級数再乘上一个因子，而超几何級数 $F(A, B, C, x)$ 满足的微分方程为

$$(x-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}+[C-(A+B+1)x]\frac{dF}{dx}-ABF=0. \qquad (40)$$

利用(40)式也不难得到(39)式的結果。

上面只讲了 B_n^s 的二級微商的求法，至于求更高級的微商，可以从(39)式继續作下去，容易求出 B_n^s 的 n 級微商表示成为 $n-1$ 級以下各級微商的式子，最后可化为 B_n^s 及 $\frac{dB_n^s}{d\alpha}$ 的函数。

§4 哥西数和它的应用

这一节我們讲第二个問題，即展开(5-2-18)式提出来的 L, L', L_1', L_1，为此我們先引入一种特殊的数。

設函数 W 定义为

$$W=x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q, \qquad (1)$$

其中 j, q 为正整数或 0，p 为任意整数。W 可以按二項式定理进行展开，得到 x 的正和負幂的多項式，应为有限項。令 $N_{-p,j,q}$ 为展开式中的常数項，也就是說，$N_{-p,j,q}$ 为

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$$

中的 x^p 的系数。这样定义的 $N_{-p,j,q}$ 称为“哥西数”。下面我們先来討論它的一些性质和数值求法。

1. 首先我們容易看出

$$N_{-p,j,q}\begin{cases}=1, & \text{如 } j+q-p \text{ 为 } 0;\\ =0, & \text{如 } j+q-p \text{ 为負或奇数。}\end{cases} \qquad (2)$$

因为根据(1)式

$$W=x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$$
$$=x^{j+q-p}+C_1x^{j+q-p-2}+C_2x^{j+q-p-4}+\cdots, \qquad (3)$$

故当 $j+q-p=0$ 时，W 的常数項为第一項，即等于1；如果

$j+q-p$ 为负时，则 W 沒有常数項，即常数項为 0；同样如果 $j+q-p$ 为奇数时，W 的常数項也为零。

其次我們也可以得到

$$N_{p,j,q}=(-1)^q N_{-p,j,q}, \tag{4}$$

因为如在 W 中令 $x'=\frac{1}{x}$，則常数項不变，仍为 $N_{-p,j,q}$。以 $x'=\frac{1}{x}$ 代入(1)式后成为

$$x'^p\left(x'+\frac{1}{x'}\right)^j\left(\frac{1}{x'}-x'\right)^q=(-1)^q x'^p\left(x'+\frac{1}{x'}\right)^j\left(x'-\frac{1}{x'}\right)^q,$$

而由右端可知，常数項即为 $(-1)^q N_{p,j,q}$，因此(4)式成立。

有了上面性质后，我們在求哥西数的值时就只考虑 $j+q-p$ 为正偶数的情形，而且也只考虑 $p\geqslant 0$。

現在来討論哥西数的值。由定义可知它一定是整数，先假設 $j=0$，则 W 为

$$x^{-p}\left(x-\frac{1}{x}\right)^q=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\frac{q!}{i!(q-i)!}x^{q-p-2i}.$$

上式是当 $i=\frac{1}{2}(q-p)$ 时为常数項($q-p$ 为正偶数)，故得

$$N_{-p,0,q}=(-1)^{\frac{q-p}{2}}\frac{q!}{\left(\frac{q-p}{2}\right)!\left(\frac{q+p}{2}\right)!}. \tag{5}$$

根据(5)式容易找 q, p 的数值造表。

对于 $j\neq 0$ 的情形，可以根据

$$x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j+1}\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$$

$$=x^{-p+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q+x^{-p-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q.$$

两端的常数項应該相等。因此有

$$N_{-p,j+1,q}=N_{-p+1,j,q}+N_{-p-1,j,q}. \tag{6}$$

只要根据 (5) 式造出了 $N_{-p,0,q}$ 的表，就不难根据 (6) 式得到 $j\neq 0$ 时的值。$N_{-p,0,q}$ 的表如下：

$N_{-p,0,q}$ 的值

q \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1		1								
2	−2		1							
3		−3		1						
4	−6		−4		1					
5		10		−5		1				
6	−20		+15		−6		1			
7		−35		+21		−7		1		
8	+70		−56		+28		−8		1	
9		+126		−84		+36		−9		1

关于哥西数的其他一些性质可参看布尔格(Bourget)的論文❶。

2. 現在利用哥西数来作展开式，但要先証明哥西定理。設 S 为偏近点角 E 的周期函数，周期为 2π。根据 E 和平近点角 M 的关系知，S 也应为 M 的周期函数，周期仍为 2π。如果 S 可以展开为 E 的傅里哀級数，則經过变换，S 也可以展开为 M 的傅里哀級数

$$S=\frac{1}{2}A_0+\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos iM+\sum_{i=1}^{\infty}B_i\sin iM. \tag{7}$$

若令

$$z=\exp(\sqrt{-1}M), \tag{8}$$

則代入(7)式后，S 可以变为

$$S=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}P_i z^i. \tag{9}$$

---

❶ 参看 Bourget 在 Annales de l'Observatoire de Paris, Tom. VII, p. 300～303 上发表的論文。

其中

$$\left.\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2}A_i + \frac{B_i}{2\sqrt{-1}} \quad (i>0), \\ P_{-i} &= \frac{1}{2}A_i - \frac{B_i}{2\sqrt{-1}}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

反之

$$\left.\begin{aligned} A_i &= P_i + P_{-i}, \\ B_i &= \sqrt{-1}(P_i - P_{-i}). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

因此只要能求出 P_i，则(7)式的系数就可以得出。

由于 $$\int_0^{2\pi} z^p dM = \int_0^{2\pi} (\cos pM + \sqrt{-1}\sin pM)dM$$

$$= \begin{cases} 2\pi, & 若\ p=0; \\ 0, & 若\ p\neq 0. \end{cases}$$

故由(9)式立即可得

$$2\pi P_i = \int_0^{2\pi} S z^{-i} dM. \tag{12}$$

令

$$w = \exp(\sqrt{-1}E), \tag{13}$$

则根据 E 和 M 的关系

$$M = E - e\sin E,$$

有

$$\begin{aligned} z &= \exp(\sqrt{-1}M) = \exp\sqrt{-1}(E - e\sin E) \\ &= w\exp(-\sqrt{-1}\,e\sin E) \\ &= w\exp\left[-\frac{e}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

及

$$dM = (1 - e\cos E)dE = \left[1 - \frac{e}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right]dE. \tag{15}$$

以(14)，(15)代入(12)式得

(因 $M=0$ 时 $E=0$；$M=2\pi$ 时 $E=2\pi$)

$$2\pi P_i=\int_0^{2\pi} Sw^{-i}\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]dE$$

$$=\int_0^{2\pi} Uw^{-i}dE, \tag{16}$$

其中

$$U=S\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]. \tag{17}$$

(16)式同(12)式比較，可以看出 P_i 也就是函数 U 按 w 展开的 w^i 的系数。这个結果我們称为哥西定理的第一种形式。因此，只要把 S 展开为 w 的級数就行了。(17)式的其他两个因子也很容易按 w 展开。事实上，

$$\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]$$

展开式的系数即为白塞耳函数。

(12)式还可以写为

$$2\pi P_i=-\frac{1}{i\sqrt{-1}}\int_0^{2\pi} S\frac{d}{dM}\exp(-i\sqrt{-1}M)dM.$$

利用部分积分，由于 S 在 $M=0$ 和 $M=2\pi$ 时的值相同，故得

$$2\pi P_i=\frac{1}{i\sqrt{-1}}\int_0^{2\pi}\frac{dS}{dM}\exp(-i\sqrt{-1}M)dM$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{-1}}\int_0^{2\pi}\frac{dS}{dw}\cdot\frac{dw}{dE}z^{-i}dE.$$

而
$$\frac{dw}{dE}=\sqrt{-1}\exp(\sqrt{-1}E)=\sqrt{-1}w,$$

$$z=w\exp\left[-\frac{e}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right],$$

因此

$$2\pi P_i=\frac{1}{i}\int_0^{2\pi} w^{-(i-1)}\frac{dS}{dw}\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]dE$$

$$=\int_0^{2\pi} w^{-(i-1)}VdE, \tag{18}$$

其中

$$V=\frac{1}{i}\frac{dS}{dw}\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]. \tag{19}$$

由(18)式也可以看出 P_i 也是 V 按 w 展开中 w^{i-1} 的系数。这个結果称为哥西定理的第二种形式。

这两种形式的哥西定理，就是展开 §2 提出的 L, L', L_1, L_1' 为 M 的級数的工具。

3. 設

$$S=\left(\frac{r}{a}-1\right)^m=x^m=(-e\cos E)^m$$

$$=(-1)^m\left(\frac{e}{2}\right)^m\left(w+\frac{1}{w}\right)^m. \tag{20}$$

可以利用哥西定理来得到它的展开为 M 的傅里哀級数，从前面可知，求出 P_i 就行了。而这里的 S 为 E 的偶函数，也就是 M 的偶函数。因此，傅里哀系数 $B_i=0$, $A_i=2P_i$, $P_i=P_{-i}$。为明确起見，这里用 $P_i^{(m)}$ 表示(对应于 x^m 的展开式系数)。对于 $P_0^{(m)}$，最好用第一种形式。在(17)式中令 $i=0$ 得

$$U_0=S\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]$$

$$=(-1)^m\left(\frac{e}{2}\right)^m\left(w+\frac{1}{w}\right)^m\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]. \tag{21}$$

$P_0^{(m)}$ 卽为 U_0 中的常数項，要看 m 为奇数或偶数而定。

(1) 若 $m=2m'$ (偶)，則

$$P_0^{(2m')}=\left(\frac{e}{2}\right)^{2m'}N_{0,2m',0}=\left(\frac{e}{2}\right)^{2m'}\frac{(2m')!}{(m'!)^2}. \tag{22}$$

(2) 若 $m=2m'+1$ (奇)，則

$$P_0^{(2m'+1)}=\left(\frac{e}{2}\right)^{2m'+2}N_{0,2m'+2,0}$$

$$=\left(\frac{e}{2}\right)^{2m'+2}\frac{(2m'+2)!}{[(m'+1)!]^2}. \tag{23}$$

至于对一般的 $P_i^{(m)}$，最好用第二种形式，由(19)式知

$$V=\frac{1}{i}\frac{dS}{dw}\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]=\frac{1}{w}V', \tag{24}$$

其中

$$V'=(-1)^m\frac{m}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^m\left(w+\frac{1}{w}\right)^{m-1}\left(w-\frac{1}{w}\right)\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right], \tag{25}$$

则 $P_i^{(m)}$ 为 V 中 w^{i-1} 的系数，也就是 V' 中 w^i 的系数。

但是

$$\left(w+\frac{1}{w}\right)^{m-1}\left(w-\frac{1}{w}\right)\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right]$$

$$=\left(w+\frac{1}{w}\right)^{m-1}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^q}{q!}\left(w-\frac{1}{w}\right)^{q+1},$$

因此，不难看出

$$P_i^{(m)}=(-1)^m\frac{m}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^m\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^q}{q!}N_{-i,m-1,q+1}, \tag{25'}$$

故

$$S=x^m=P_0^{(m)}+2\sum_{i=1}^{\infty}P_i^{(m)}\cos iM. \tag{26}$$

这就是所需要的結果。

4. 若令

$$S=\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-m}=\frac{1}{(1+x')^m}=\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]^{-m}, \tag{27}$$

它仍然为 E 的偶函数，也为 M 的偶函数，仍有 $A_i=2P_i$, $B_i=0$, $P_i=P_{-i}$。在这里，我們記为 P_i^m。它应該是

$$U=\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]^{-m+1}\exp\left[\frac{ie}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)\right] \tag{28}$$

中 w^i 的系数。先来討論 P_0^m，它是

$$U_0=\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]^{-(m-1)}$$

的常数项。上式展开式中，$\left(w+\frac{1}{w}\right)$的奇次幂不含常数项，故略去。因此可以写为

$$U_0=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-1)m(m+1)\cdots(m+2j-2)}{(2j)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2j}\left(w+\frac{1}{w}\right)^{2j}.$$

所以

$$\begin{aligned}P_0^m&=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-1)m(m+1)\cdots(m+2j-2)}{(2j)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2j}N_{0,2j,0}\\&=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-1)m(m+1)\cdots(m+2j-2)}{(j!)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^{2j}.\end{aligned}\tag{29}$$

对于一般的P_i^m，由于

$$\left[1-\frac{e}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]^{-(m-1)}=\sum_{j=0}^{\infty}m_j\left(\frac{e}{2}\right)^j\left(w+\frac{1}{w}\right)^j,\tag{30}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&m_0=1,\\&m_j=\frac{(m-1)m(m+1)\cdots(m+j-2)}{j!}.\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

因此由(28)式

$$\begin{aligned}U&=\sum_{j=0}^{\infty}m_j\left(\frac{e}{2}\right)^j\left(w+\frac{1}{w}\right)^j\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^q}{q!}\left(w-\frac{1}{w}\right)^q\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{m_j i^q}{q!}\left(\frac{e}{2}\right)^{j+q}\left(w+\frac{1}{w}\right)^j\left(w-\frac{1}{w}\right)^q,\end{aligned}\tag{32}$$

得

$$P_i^m=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{m_j i^q}{q!}\left(\frac{e}{2}\right)^{j+q}N_{-i,j,q}.\tag{33}$$

于是

$$\frac{1}{(1+x')^m}=\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-m}=P_0^m+2\sum_{i=1}^{\infty}P_i^m\cos iM'.\tag{34}$$

5．在$m=2$时可得（去掉各字母上的“′”）

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}=\frac{a^2}{r^2}=P_0^2+2\sum_{i=1}^{\infty}P_i^2\cos iM.\tag{35}$$

$$P_0^2=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2j)!}{(j!)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^{2j}$$

$$=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2j-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2j)}(e^2)^j$$

$$=(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{36}$$

此时，由(31)式知 $m_i=1$，故

$$P_i^2=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{i^j}{q!}\left(\frac{e}{2}\right)^{j+q}N_{-i,j,q}. \tag{37}$$

但从面积定律知

$$r^2\dot{f}=\sqrt{\mu P}=na^2\sqrt{1-e^2},$$

故

$$f=M+2\sqrt{1-e^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P_i^2}{i}\sin iM. \tag{38}$$

积分时应有积分常数，但由于 $M=0$ 时 $f=0$，故积分常数为 0，因此得

$$y=f-M=2\sqrt{1-e^2}\sum_{i=1}^{\infty}P_i^2\frac{\sin iM}{i}. \tag{39}$$

6．根据前面所得的结果，我們已經可以把 L，L'，L_1，L_1' 展开为 M 的傅里哀級数。由

$$L=x^{n-i}\sin hy=x^{n-i}\frac{h}{1!}y-x^{n-i}\frac{h^3}{3!}y^3+\cdots; \tag{40}$$

$$L_1=x^{n-i}\cos hy=x^{n-i}-x^{n-i}\frac{h^2}{2!}y^2+x^{n-i}\frac{h^4}{4!}y^4-\cdots; \tag{41}$$

$$L'=\frac{x'^i\sin hy'}{(1+x')^{n+1}}=x'^i\sin hy'-\frac{n+1}{1}x'^{i+1}\sin hy'+\cdots; \tag{42}$$

$$L_1'=\frac{x'^i\cos hy'}{(1+x')^{n+1}}=x'^i\cos hy'-\frac{n+1}{1}x'^{i+1}\cos hy'+\cdots, \tag{43}$$

并利用(26)，(25)，(23)和(39)，(37)各式，就可以得到 L，L_1，对于 M 的傅里哀級数。当然推导很繁，但可以按 e 的冪項整理，因为在行星情况中，e 都比較小。勒沃里叶首先求出了它們的展开

式，展到 e^7 項[1]。

得到 L, L_1 后，再利用(34)，(33)，(29)式可以得到 L', L'_1，它的展开到 e^7 的式子[2]。

§5 摄动函数展开式的結果

在前面几节中，我們已經知道了摄动函数展开的步驟和所需的知識，下面就来求出展开式的結果。

1．由§2的討論，摄动函数的主要部分可以展为

$$\Delta^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(rr')^k[r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi')]^{-\frac{2k+1}{2}}$$
$$\times\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2k}(2\lambda)^{2k}\sin^k(f+\Pi)\sin^k(f'+\Pi').\qquad(1)$$

在(1)式中，令

$$\left.\begin{aligned}f(r,r')&=(rr')^k[r^2+r'^2-2rr'\cos H_1]^{-\frac{2k+1}{2}},\\H_1&=f-f'+\Pi-\Pi',\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

則由§2的討論可知

$$\left.\begin{aligned}&f(r,r')=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x-x')^p}{(1+x')^{p+1}}\cdot\frac{a^p}{p!}\cdot\frac{\partial^p}{\partial a^p}f(a,a'),\\&\text{其中}\qquad r=a(1+x),\qquad r'=a'(1+x').\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

但是由

$$\begin{aligned}f(a,a')&=(aa')^k(a^2+a'^2-2aa'\cos H_1)^{-\frac{2k+1}{2}}\\&=\frac{\alpha^k}{a'}D^{-s},\end{aligned}\qquad(4)$$

其中 $D=1+\alpha^2-2\alpha\cos H_1$,

$f(a,a')$ 即前面的 $F(a,a')$, $\alpha=\frac{a}{a'}$, $s=\frac{2k+1}{2}$;

---

[1] 参看 Leverrier 在 Annales de l'Observatoire de Paris, Tom. I, p. 346～348 发表的論文。

[2] 同上，p. 348～355.

又由§3知

$$D^{-s}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^s\cos nH_1=\frac{1}{2}B_0^s+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^s\cos nH_1, \tag{5}$$

因此(3)式成为

$$f(r,r')=\frac{1}{2a'}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x-x')^p}{(1+x')^{p+1}}\frac{\alpha^p}{p!}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^p[\alpha^k B_n^s]}{\partial\alpha^p}\cos nH_1. \tag{6}$$

在(1)式中还有另外的三角函数

$$\sin^k(f+H)\sin^k(f'+H'),$$

根据三角函数的关系，不难得出

$$\sin^k A\sin^k B=\frac{1}{2^{2k}}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{i+j+k}(k!)^2}{i!j!(k-i)!(k-j)!}$$
$$\times\cos[(k-2i)A+(k-2j)B], \tag{7}$$

其中　　$A=f+H,\quad B=f'+H'.$

以(2)，(6)，(7)代入(1)式。因求和符号太多，为简单起见，可以用一个求和符号来表示，求和号内系数的所有文字都要求和，故(1)式可以简单地写为

$$2a'\Delta^{-1}=\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2k}\lambda^{2k}\frac{(x-x')^p}{(1+x')^{p+1}}\frac{\alpha^p}{p!}\frac{\partial^p[\alpha^k B_n^s]}{\partial\alpha^p}$$
$$\times\frac{(-1)^{i+j}(k!)^2}{i!j!(k-i)!(k-j)!}\cos nH_1$$
$$\times\cos[(k-2i)A+(k-2j)B]. \tag{8}$$

后面的两个余弦乘积可以变成和差。由于 n 是由 $-\infty$ 到 $+\infty$，而余弦函数是偶函数，容易証明

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n\cos nH_1\cos\beta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n\cos(nH_1+\beta). \tag{9}$$

其中系数要有关系 $P_{-n}=P_n$ 才行，这点是成立的，B_n^s 就具有这样的性质。因此，(8)式中的三角函数可写成

$$\cos[nH_1+(k-2i)A+(k-2j)B].$$

但　　$H_1=f-f'+H-H'=A-B,$

故上式成为

$$\cos[(n+k-2i)A-(n-k+2j)B],$$

其中 A,B 的系数包含四个量：n, k, i, j. 如果用 h, r 表示 A,B 的系数，即

$$h=n+k-2i,\qquad r=n-k+2j,\tag{10}$$

则根据 n, k, i, j 的不同数值，h, r 应取所有的整数值，在求和时应从 $-\infty$ 到 $+\infty$. 故三角函数成为

$$\cos[hA-rB]=\cos[hf-rf'+h\Pi-r\Pi'].\tag{11}$$

根据 h, r 的定义，可以把(8)式中包含 n, k, i, j 的量重新整理成 h, r 的函数，整理后的系数記为 $K(h, r)$，則(8)成为

$$2a'\Delta^{-1}=\sum\frac{(x-x')^p}{(1-x')^{p+1}}\frac{a^p}{p!}\frac{\partial^p[K(h,r)]}{\partial a^p}\cos[h(f+\Pi)-r(f'+\Pi')].\tag{12}$$

再令

$$\frac{1}{2a'}\frac{a^p}{p!}\frac{\partial^p[K(h,r)]}{\partial a^p}=K_p(h,r),\tag{13}$$

則

$$\Delta^{-1}=\sum\frac{(x-x')^p}{(1-x')^{p+1}}K_p(h,r)\cos[h(f+\Pi)-r(f'+\Pi')].\tag{14}$$

2. 現在来討論 Δ^{-1} 表示成为平近点角的形式。由于

$$f=M+y,\qquad f'=M'+y',\tag{15}$$

因此

$$\begin{aligned}&\cos[h(f+\Pi)-r(f'+\Pi')]\\&=\cos[h(M+\Pi)-r(M'+\Pi')+hy-r'y']\\&=\cos[h(M+\Pi)-r(M'+\Pi')](\cos hy\cos ry'\\&\quad+\sin hy\sin ry')+\sin[h(M+\Pi)\\&\quad-r(M'+\Pi')](\cos hy\sin ry'-\sin hy\cos ry'),\end{aligned}\tag{16}$$

$$(x-x')^p=\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\frac{p!}{q!(p-q)!}x^{p-q}x'^q. \tag{17}$$

以(16),(17)式代入(14)式,得

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}=\sum\Big\{&K_p(h,\ r)\frac{(-1)^q p!}{q!(p-q)!}\Big[x^{p-q}\cos hy\frac{x'^q\cos ry'}{(1+x')^{p+1}}\\&+x^{p-q}\sin hy\frac{x'^q\sin ry'}{(1+x')^{p+1}}\Big]\\&\times\cos[h(M+H)-r(M'+H')]\\&+K_p(h,\ r)\frac{(-1)^q p!}{q!(p-q)!}\Big[x^{p-q}\cos hy\frac{x'^q\sin ry'}{(1+x')^{p+1}}\\&-x^{p-q}\sin hy\frac{x'^q\cos ry'}{(1+x')^{p+1}}\Big]\\&\times\sin[h(M+H)-r(M'+H')]\Big\}.\end{aligned} \tag{18}$$

問題在于展开下列四种形式的量为 M, M' 的級数。

$$\left.\begin{aligned}&L=x^{p-q}\cos hy, &&L'=x^{p-q}\sin hy,\\&L_1=\frac{x'^q\cos ry'}{(1+x')^{p+1}}, &&L_1'=\frac{x'^q\sin ry'}{(1+x')^{p+1}}.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

但在 § 4 中已讲过它們的展开方法。勒沃里叶得到了它們展开到偏心率的七次方的展开式。再把系数

$$\frac{(-1)^q P!}{q!(p-q)!}$$

合并到 L_1 和 L_1' 的展开式系数中,則它們的形式为

$$\left.\begin{aligned}&L=\sum_{n=0}^{\infty}P(n)\cos nM, &&L'=\sum_{n=0}^{\infty}P'(n)\sin nM,\\&L_1=\sum_{n'=0}^{\infty}P_1(n')\cos n'M', &&L_1'=\sum_{n'=0}^{\infty}P_1'(n')\sin n'M'.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中 $P(n)$, $P'(n)$ 为 $e^{n+2\rho}\phi(e^2)$ 的形式,ρ 为正整数或 0;$\phi(e^2)$ 为 e^2 的級数,同样 $P_1(n')$, $P_1'(n')$ 为 $e'^{n'+2\rho'}\psi(e'^2)$ 的形式。以(20)式代入(18)式,得 Δ^{-1} 的一般項为

$$
\begin{aligned}
& K_p(h, r)[P(n)P_1(n')\cos nM \cos n'M' \\
& \quad + P'(n)P_1'(n')\sin nM \sin n'M']\cos[h(M+\Pi) \\
& \quad - r(M'+\Pi')] + K_p(h, r)[P(n)P_1'(n')\cos nM \sin n'M' \\
& \quad - P'(n)P_1(n')\sin nM \cos n'M']\sin[h(M+\Pi) \\
& \quad - r(M'+\Pi')].
\end{aligned}
$$

利用三角函数和差同乘积的关系，可以整理为

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{4}K_p(h, r)[P(n)+P'(n)][P_1(n') \\
& \quad - P_1'(n')]\cos[h(M+\Pi) - r(M'+\Pi') + nM + n'M'] \\
& \quad + \frac{1}{4}K_p(h, r)[P(n) - P'(n)][P_1(n') \\
& \quad - P_1'(n')]\cos[h(M+\Pi) - r(M'+\Pi') - nM - n'M'] \\
& \quad + \frac{1}{4}K_p(h, r)[P(n)+P'(n)][P_1(n') \\
& \quad + P_1'(n')]\cos[h(M+\Pi) - r(M'+\Pi') + nM - n'M] \\
& \quad + \frac{1}{4}K_p(h, r)[P(n) - P'(n)][P_1(n') \\
& \quad - P_1'(n')]\cos[h(M+\Pi) - r(M'+\Pi') \\
& \quad - nM + n'M].
\end{aligned} \tag{21}
$$

(21)式就是摄动函数展开为 M, M' 的級数的一般形式，三角函数部分为

$$
\begin{aligned}
& \cos[h(M+\Pi) - r(M'+\Pi') \pm nM \pm n'M'] \\
& \quad = \cos[(h\pm n)M - (r\pm n')M' + h\Pi - r\Pi'],
\end{aligned}
$$

再明确些可写为

$$
\cos(iM + i'M' + j\Pi - j\Pi'). \tag{22}
$$

系数分两部分：$K_p(h, r)$ 为 $\lambda = \sin\frac{I}{2}$ 和 $\alpha = \frac{a}{a'}$ 的函数；$P(n)$等为 e, e' 的函数。因此摄动函数可以形式地写为

$$
\left.
\begin{aligned}
& \Delta^{-1} = \sum e^{l}e'^{l'}\lambda^{2l_4}\cdot F(e^2, e'^2, \alpha, \alpha')\cos D, \\
& D = iM + i'M' + j\Pi + j'\Pi',
\end{aligned}
\right\} \tag{23}
$$

其中求和符号应該对 l, l', k, i, i', j, j' 求和。l, l', k 为正整数或0，i, i', j, j' 为任意整数。

3．上面只討論了摄动函数的主要部分，还有輔助部分沒有討論，但輔助部分可利用上面同样的方法，容易得到它展开为 M, M' 的三角級数形式。輔助部分为

$$-\frac{r}{r'^2}\cos H\cdot\frac{a(1+x)}{a'^2(1+x')^2}[\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')+\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\cos I]. \tag{24}$$

把 $\cos I$ 写为 $\quad 1-2\sin^2\frac{I}{2}=1-2\lambda^2,$

故得

$$\begin{aligned}-\frac{r}{r'^2}\cos H&=-\frac{a(1+x)}{a'^2(1+x')^2}[\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\\&\quad-2\lambda^2\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')]\\&=-\frac{a(1+x)}{a'^2(1+x')^2}[(1-\lambda^2)\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\\&\quad-\lambda^2\cos(f+f'+\Pi+\Pi')].\end{aligned}\tag{25}$$

再引入 $f=M+y,\ f'=M'+y'$，则

$$\left.\begin{aligned}&\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\\&\quad=\cos(M-M'+\Pi-\Pi')\times(\cos y\cos y'+\sin y\sin y')\\&\qquad+\sin(M-M'+\Pi-\Pi')(\cos y\sin y'-\sin y\cos y'),\\&\cos(f+f'+\Pi+\Pi')\\&\quad=\cos(M+M'+\Pi+\Pi')\times(\cos y\cos y'-\sin y\sin y')\\&\qquad+\sin(M+M'+\Pi+\Pi')(\sin y\cos y'+\cos y\sin y').\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

以(26)式代入(25)后，只需要再展开

$$\cos y,\ x\cos y,\ \sin y,\ x\sin y,\ \frac{\cos y'}{(1+x')^2},\ \frac{\sin y'}{(1+x')^2}$$

等量为 M 或 M' 的三角級数就行了。它們都是 L, L', L_1, L_1' 的特例，故用同样方法可以求出，把得到的展开式再代入(25)式，按照前面同样的方法进行整理可得

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{r}{r'^2}\cos H &= \sum F(e, e', a, a', \lambda)\cos(iM+i'M \\
&\quad +H-H') + \sum G(e, e', a, a', \lambda) \\
&\quad \times\cos(iM+i'M+H+H'), \\
\text{其中}\quad F(e, e', a, a', \lambda) &= -\frac{a}{a'^2}(1-\lambda^2)[F'(e^2, e'^2) \\
&\quad +eF''(e^2, e'^2)], \\
G(e, e', a, a', \lambda) &= -\frac{a}{a'^2}\lambda^2 G'(e^2, e'^2),
\end{aligned}\right\} \tag{27}
$$

并且 $F'(e^2, e'^2)$和 $G(e^2, e'^2)$都是偏心率 e^2, e'^2 的冪級数。我們可以看出,(27)式也是 Δ^{-1} 展开式的形式,只是要簡单些。

4. 从前面(23),(27)式,我們已求出摄动函数展开为平近点角 M, M' 的三角級数的一般形式,由于

$$
R=Gm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r}{r'^2}\cos H\right), \tag{28}
$$

只需要把 (23),(27) 式相加再乘以 Gm' 就行了。由于(27)式是(23)式的特殊情形,因此只需要将(23)式中相应項的系数加以修改,R 的展开式就完全可以用(23)式来表示。

这样的展开方法是最經典的,由勒沃里叶作得最完善❶。后来波格(M. Boquet)展开到八次冪❷。他們的展开式形式和上述有点不同,他們在三角函数中不是直接用 M, M' 而是用平黃經 l, l',实际上这是一样的。由于 $l=\tilde{\omega}+M$, $l'=\tilde{\omega}'+M'$, 而且还把 l 换为 $\lambda=l+\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}+\Pi-\Pi'$, 用这样的定义可以使三角函数中各引数的系数和为 0, 具体的討論方法可参看蒂塞朗的著作❸。

目前,对于水星、金星、地球和火星的摄动运动研究,就是应用这个展开方法。它們的基本常数和积分常数,都是紐康根据勒沃

❶ Leverrier: Annales de l'Observatoire de Paris, Tom. I, p. 277～330.

❷ Boquet: Annales de l'Observatoire de Paris, Tom. XIX.

❸ Tisserand: Traité de Mécanique Céleste, Tom. I, Chapt. XVIII.

里叶的結果和他自己的观测值重新得出的．其中关于火星的数值因同观測相差較大，后来又由罗斯(Ross)重新作軌道改进和质量测定，改进了紐康的結果❶．这些結果是最近数十年来天文年历編算的根据．

用这样的展开方法討論大行星的运动，一般說来是够了，但用到木星和土星之間的摄动，天王星和海王星之間的摄动，还有困难。关于这方面的問題將在后面討論。

在摄动函数展开式中，a，e 包含在系数内，M_0 在三角函数中，而 i，Ω，ω 則隐含在 $\lambda=\sin\frac{I}{2}$，Π，Π' 中，故对 a，e，M_0 求偏微商时比較方便，而 i，Ω，ω 的偏微商是通过 λ，Π，Π' 来求的，也沒有什么困难。如用 $\Pi=\omega-\Phi$，$\Pi'=\omega'-\Psi$，則 ω 也可分离出来，只是 Ω，i 隐含在 λ，Φ，Ψ 内。

§6 长期摄动，周期摄动和长周期摄动

上面旣然得到了摄动函数的展开式，我們就可以利用它来解拉格朗日行星运动方程，在这里我們只考虑一阶摄动。

1．从上节可知，摄动函数 R 的展开式的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}R&=Gm'\sum e^l e'^{l'}\lambda^{2k}F(e^2,e'^2,a,a')\cos D,\\D&=iM+i'M'+j\Pi+j'\Pi'\\&=iM+i'M+j\omega+j'\omega-j\Phi-j'\Psi.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

以 $M=nt+M_0=nt+\chi$，$M'=n't+\chi'$ 代入得

$$D=(in+i'n')t+i\chi-i'\chi'+j\omega+j'\omega'-j\Phi-j'\Psi.\tag{2}$$

在 D 中，i，i'，j，j' 为任意正整数，求和时它們四个都应該从 $-\infty$ 到 $+\infty$，但在 $i=i'=0$ 时，D 就同 t 无关，此时我們記为

$$D_0=j\omega+j'\omega'-j\Phi-j'\Psi.\tag{3}$$

在一般的 D 中，假定 i，i' 不同时为 0，因此摄动函数成为

❶ 参看 Astronomical Papers, Vol. VII, Part 2.

$$R = m'\sum c \cos D_0 + m'\sum C \cos D. \tag{4}$$

其中 c, C 为系数，亦是 e, e', a, a', $\lambda = \frac{\sin I}{2}$（即 Ω, i）的函数，并乘入了万有引力常数 G.

我們現在取拉格朗日行星运动方程的第二种形式，即軌道根数取为 a, e, i, Ω, ω, χ. 下面分别来解。

首先由于

$$\dot{a} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \chi}, \tag{5}$$

因 D_0 中不含 M，故沒有 χ，系数中也不含 χ，故得

$$\dot{a} = -\frac{2m'}{na}\sum iC \sin D.$$

积分时，由于我們只考虑一阶摄动，故所有在方程右端的軌道根数都作为常数，只有 t 为变量。而在 D 中，t 的系数为 $in + i'n'$，故积分后得

$$a = a_0 + \frac{2m'}{na}\sum \frac{iC}{in + i'n'}\cos D. \tag{6}$$

其中 a_0 为积分常数。在后面的項中，因 D 内含有时間 t，是周期函数，用 P. T. 表示，故

$$a = a_0 + \text{P. T.}.$$

其次再由

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} = A\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{7}$$

因为在 R 的展开式中 i 包含在 λ, Φ, Ψ 内，因此 c, D_0, C, D 都是 i 的函数，故得

$$\dot{\Omega} = \Big[Am'\sum \frac{\partial c}{\partial i}\cos D_0 - Am'\sum c \sin D_0 \frac{\partial D_0}{\partial i} + Am'\sum \frac{\partial C}{\partial i}\cos D - Am'\sum C \sin D \frac{\partial D}{\partial i}\Big]. \tag{8}$$

其中 $\frac{\partial D}{\partial i} = -j\frac{\partial \Phi}{\partial i} - j'\frac{\partial \Psi}{\partial i}$，也不含 t，故积分后得

$$\Omega=\Omega_0+\left[Am'\sum\frac{\partial c}{\partial i}\cos D_0-Am'\sum c\sin D_0\frac{\partial D_0}{\partial i}\right]t$$

$$+\left[Am'\sum\frac{\partial C}{\partial i}\frac{\sin D}{in+i'n'}+Am'\sum C\frac{\partial D}{\partial i}\frac{\cos D}{in+i'n'}\right],\qquad(9)$$

Ω_0 为积分常数。令第一个括号内的量等于 β；第二个括号为周期函数，仍記为 P. T.。因此

$$\Omega=\Omega_0+\beta t+\text{P.T.}.$$

現在来討論 χ 的方程。

$$\dot{\chi}=-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}=A\frac{\partial R}{\partial e}+B\frac{\partial R}{\partial a}$$

$$=Am'\sum\frac{\partial c}{\partial e}\cos D_0+Am'\sum\frac{\partial C}{\partial e}\cos D$$

$$+Bm'\sum\frac{\partial c}{\partial a}\cos D_0+Bm'\sum\frac{\partial C}{\partial a}\cos D$$

$$-Bm'\sum C\frac{\partial D}{\partial a}\sin D.\qquad(10)$$

因在 D 中含有 n，而 $n=\mu^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}$，故

$$\frac{\partial D}{\partial a}=\frac{\partial D}{\partial n}\frac{dn}{da}=it\frac{dn}{da},$$

(10)式最后一項成为

$$-Bm't\frac{dn}{da}\sum iC\sin D.\qquad(11)$$

因此，(10)式进行积分后，前四項成为

$$\left[Am'\sum\frac{\partial c}{\partial e}\cos D_0+Bm'\sum\frac{\partial c}{\partial a}\cos D_0\right]t$$

$$+\left[Am'\sum\frac{1}{in+i'n'}\frac{\partial C}{\partial e}\sin D+Bm'\sum\frac{1}{in+i'n'}\frac{\partial C}{\partial a}\sin D\right],$$

即为长期項和周期項。(11)式积分后成为

$$Bm't\frac{dn}{da}\sum\frac{iC}{in+i'n'}\cos D-Bm'\frac{dn}{da}\sum\frac{iC}{(in+i'n')^2}\sin D,$$

因此結果为　　$\chi=\chi_0+\beta t+\text{P. T.}+t(\text{P. T.})$.

最后一項是时間 t 乘上一个周期函数，叫做混合項，或称为柏松項。

至于其他的几个軌道根数，$\tilde{\omega}$，e，i，积分后的形式都和 Ω 的情况相同，其中含有长期项和周期项，因此全部写出后是

$$\left.\begin{aligned}
a &= a_0 + \text{P. T.},\\
\Omega &= \Omega_0 + \beta t + \text{P. T.},\\
\tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \beta t + \text{P. T.},\\
e &= e_0 + \beta t + \text{P. T.},\\
i &= i_0 + \beta t + \text{P. T.},\\
\chi &= \chi_0 + \beta t + \text{P. T.} + t(\text{P. T.}).
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

总的說来，各軌道根数因摄动关系都是时間 t 的函数，这些函数又可以分为三类，即长期項，周期項和混合項。但混合項只在 χ 的式子中出現。在天体力学中，常常把混合項也归入周期項中，但有些情况下还是要作长期項，下面我們就对这些項作討論。

2．凡是軌道根数中出現了 βt 形式的項，就称为长期項，也就是这个軌道根数有长期摄动。它是与时間成比例地增加或減小。这样的項在天体力学中的地位很重要，因为它表明了軌道根数的一种变化趋势，对天体演化学有很大的意义。

值得注意的是半长徑 a 沒有长期摄动，这就說明了行星半长徑沒有长期变化，只有周期变化。如果 a 有长期变化，存在 βt 形式的項，則在 $\beta>0$ 时，行星軌道会无限制的增大；在 $\beta<0$ 时，行星的軌道会无限制的縮小，最后落到太阳上，結果是太阳系不稳定。現在旣然不存在这样的項，則說明太阳系是稳定的。但是这里只考虑了一阶摄动，如果考虑二阶和高阶摄动，还不知道是否会出現长期項，这个問題在下一节将詳細討論。

另外关于水星近日点有长期变化的問題，是相对論和牛頓引力定律之間的分歧問題，在摄动理論中，就是 $\tilde{\omega}$ 的长期摄动問題。根据拉格朗日行星运动方程，可以看出 $\tilde{\omega}$ 的解也有长期項。因此根据牛頓引力定律，水星近日点仍然有长期变化，只是同相对論所

得的数值不同。由相对論所得到的值同观測要接近些，但是如果考虑介质的阻尼，根据牛頓万有引力定律所得的結果仍然可能同观測符合。

3. 在周期項中，一般形式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{F}{in+i'n'}\sin\left[(in+i'n')t+\gamma\right]\\ \text{或}\quad&\frac{F}{in+i'n'}\cos\left[(in+i'n')t+\gamma\right]\\ \text{或}\quad&\frac{F}{(in+i'n')^2}\sin\left[(in+i'n')t+\gamma\right],\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中 i, i' 为任意整数。在一般情形下，$in+i'n'$ 不是很小的量，因此周期不长，它們的系数也不大，这样的項一般称为周期項、短周期項或周期振动，周期为

$$T' = \frac{2\pi}{in+i'n'}.$$

这样的項占振动項中絕大多数。

4. 有时 $in+i'n'$ 会很小，这样的項周期就很长，而且系数就很大，这些項我們称为长周期項或长周期振动。

当两行星的平均每日运动接近于簡单分数时，例如：$\frac{n}{n'}=\frac{p}{q}$，則在 $i=q$, $i'=-p$ 时 $in+i'n'=0$。但若 $\frac{n}{n'}$ 接近于 $\frac{p}{q}$，則所得的 $in+i'n'$ 就非常小，此时称为两行星近于通約。例如木星和土星，它們的平均运动各为

$$n=299''.13, \quad n'=120''.45,$$

当 $i=-2$, $i'=5$ 时，

$$in+i'n'=3''.99.$$

这一項的周期就几乎为木星公轉周期的 75 倍，也就是約为 890 年。相应的系数也非常大，例如木星对土星在黃經上的振动，这一

項的系数就达到 50′。

天王星对海王星的攝动也有长周期項,平均每日运动各为 42″.24 及 21″.53,在 $i=-1$, $i'=2$ 时,$in+i'n'=0''.82$;周期为天王星公轉周期的 51 倍多,約 4300 多年。

在小行星攝动討論中,接近通約的情形更多,相应的长周期項系数非常大,因此带来了很多困难,现在已成为攝动理論中的一个未能解决的問題。

5. 上面的討論都是只考虑一阶攝动,如果考虑二阶和高阶攝动,情况有些不同。周期项继續存在是沒有問題,而长期項的冪次会增加。一般說来,討論到某阶攝动就会有时間 t 的某阶冪存在。例如討論到二阶攝动,地球、金星、木星的偏心率 e 为

$$e_{地}=0.0167498-0.0000426\,t+0.000000137\,t^2,$$

$$e_{金}=0.00681636-0.00005384\,t-0.000000126\,t^2,$$

$$e_{木}=0.04833475+0.000164180\,t-0.000000468\,t^2.$$

其中 t 为 1900 年开始算的时間,以 100 年为单位。只从公式上看,几万年后地球偏心率应該为負。实际上偏心率不可能为負,而是在三万多年后地球的偏心率又会增加,这需要討論高阶攝动。只要系数恰当,冪級数也可能表示周期函数。例如

$$\sin mt=mt-\frac{m^3t^3}{3!}+\frac{m^5t^5}{5!}-\cdots$$

或

$$\sin mt+\cos mt=1+mt-\frac{m^2t^2}{2!}-\frac{m^3t^3}{3!}+\frac{m^4t^4}{4!}+\frac{m^5t^5}{5!}-\cdots.$$

右端都是冪級数,但它們都是 t 的周期函数。因此,长期項究竟是否眞正"长期"还成問題,还有待研究。

§7 柏松定理,太阳系的稳定性問題

关于太阳系的稳定性問題,是天体演化学和天体力学的一个

基本問題，其中一个主要的内容就是行星半長徑变化是否有長期項。如果沒有長期項，太阳系就肯定是稳定的(如不考虑其他因素)；如果有長期項，則太阳系的稳定性就值得怀疑。这个問題拉普拉斯就注意到了，到目前为止还沒有最后解决。

最初拉普拉斯和拉格朗日就証明了❶❷，在一阶摄动中，半長徑 a 沒有長期項，他們是用雅哥比方法証明的，关于这一点，在上一节已經讲到了。至于二阶摄动的情形，柏松第一次証明行星半長徑的二阶摄动沒有長期項，只有周期項和混合項(即柏松項)，这就是著名的柏松定理❸。他的証明非常复杂，后来由拉格朗日把証明簡化❹。但是拉格朗日的証明中有一个錯誤，由烏厄耳(Houël)指出，并由蒂塞朗于1876年改正和用雅哥比坐标重新証明❺❻。后来又有潘加来❼、安朵瓦叶(Andoyer)❽、宋德曼(Sundmann)❾、荻原雄佑(Yusuke Hagihara)❿⓫等人的工作，他們用正則根数作变量，使得証明严格而且簡单，于是柏松定理完全能成立了。

---

❶ Laplace: Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris, 1773.

❷ Lagrange: Mémoires des l'Academie de Berlin, 1776.

❸ Poisson: Journale de l'Ecole Polytechnique, Tom. XV, p. 1～56. 1809.

❹ Oeuvres Complétes de Lagrange, Tom. VI, p. 741～749.

❺ Tisserand: Mémoire de l'Academie de Science de Toulouse. Ser., 7, Tom. VII.

❻ Tisserand: Traité de Mécanique Céleste, Tom. I, Chapt. XXV.

❼ Poincaré: Bulletin Astronomique, Tom. 14, 1897.

❽ Andoyer: Annales de l'Observatoire de Paris. Memoires, Tom. 23, 1903.

❾ Sundmann: Festschrift für Elis Strömgren, M. Manksgaard, Kopenhagen, 1940.

❿ Hagihara: Japenese Journal of Astronomy and Geophysics, Tom. 21, 1944.

⓫ Hagihara: The Stability in Celestial Mechanics, § 2, 1957.

在这里，仍然采用前面讲过的各阶摄动形式来証明。为明确起見，我們先来討論三体問題的情形。

1. 設 p_i, q_i 为两行星的軌道根数，$a^{(0,2)}, a^{(1,1)}$ 为半长徑的二阶摄动（对应于 p_i 的行星），则根据 §1 的討論知

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}^{(1,1)} &= \sum_{j=1}^{6}\left[\frac{\partial F(p,q)}{\partial q_j}\right] q_j^{(1,0)},\\ \dot{a}^{(0,2)} &= \sum_{j=1}^{6}\left[\frac{\partial F(p,q)}{\partial p_j}\right] p_j^{(0,1)}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 $F(p,q)$ 为 a 的表示式，从拉格朗日行星运动方程可知它等于

$$F(p,q) = \frac{2}{nam'}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}.$$

在这里分母有 m' 的因子，但 R 中也有 Gm' 作因子，故可以消去。在(1)式中 $F(p,q)$ 对 p 或 q 求过偏导数后，再令 $p=p^{(0)}$，$q=q^{(0)}$。

根据上节的討論，可知

$$R = m'\sum c\cos D_0 + m'\sum C\cos D, \tag{2}$$

其中 D_0 为不含 t 的項，D 中一定含有 t，因此

$$F(p,q) = \frac{2}{nam'}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} = -\frac{2}{na}\sum iC\sin D. \tag{3}$$

可以看出 $F(p,q)$ 中只含有周期項，不包含常数項。于是 $F(p,q)$ 对于任何 p 或 q 求偏微商后也一定只含有周期項。当然，正如在上节中見过的，对于半长徑 a, a' 的偏微商会出現混合項。

我們先討論 $a^{(0,2)}$。設 (1) 式中 p 分别表示 $a, e', i, \cdots$. 对于每一个軌道根数，求偏微商后再乘上它自己的一阶摄动。从(3)式可知

$$\frac{\partial F(p,q)}{\partial a} = -\sum i\frac{\partial\left(\frac{2C}{na}\right)}{\partial a}\sin D + \frac{2t}{na}\sum i^2 C\frac{dn}{da}\cos D$$

$$= \text{P. T.} + t(\text{P. T.}), \tag{4}$$

而

$$a^{(0,1)} = a_0 + \text{P. T.},$$

因此

$$\left[\frac{\partial F(p,\ q)}{\partial a}\right]_0 a^{(0,1)}=\text{P. T.}+t(\text{P. T.})\text{[1]}. \tag{5}$$

又由

$$\frac{\partial F(p,\ q)}{\partial e}=-\frac{2}{na}\sum i\frac{\partial C}{\partial e}\sin D+\text{P. T.}, \tag{6}$$

而
$$e^{(0,1)}=e_0+\beta t+\text{P. T.},$$

因此

$$\left[\frac{\partial F(p,\ q)}{\partial e}\right]_0 e^{(0,1)}=\text{P. T.}+t(\text{P. T.}). \tag{7}$$

同理可得其他各軌道根数的値都是 P. T.+t(P. T.)的形式，因此

$$\dot{a}^{(0,2)}=\text{P. T.}+t(\text{P. T.}),$$

故得

$$a^{(0,2)}=a_0+\text{P. T.}+t(\text{P. T.}). \tag{8}$$

可知 $a^{(0,2)}$ 不含长期項，只含有柏松項，周期項及常数項。

至于 $a^{(1,1)}$ 可用同样方法討論。对于摄动行星的軌道根数 q_i，分别为 $a',e',i',\cdots$，根据(3)式，$F'(p,\ q)$对于 a', e', i', …的偏微商形式与 $F(p,\ q)$对 a, e, i, …的偏微商相同。因为 $F(p,\ q)$的系数 C 和 D 同样是 a', e', i', …的函数，而函数形式也相似，故

$$\frac{\partial F(p,\ q)}{\partial a'}=\text{P. T.}+t(\text{P. T.}),\quad \frac{\partial F(p,\ q)}{\partial e'}=\text{P. T.},\ \cdots.$$

对于 $a'^{(1,0)}$, $e'^{(1,0)}$, $i'^{(1,0)}$,…等，可根据它們的微分方程来求出。但它們的方程与 $a^{(1,0)}$, $i^{(1,0)}$, $e^{(1,0)}$,…等完全相似，只是在其中把軌道根数互换，并把 R 换为 R',

$$R'=Gm\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r'}{r^2}\cos H\right).$$

解的方法完全相同，得到的結果形式也完全一样，只是符号上有一

[1] 这里不够严格，周期項乘周期項可能出現常数項，但很多书和文献都这样用，还值得研究。

些差别。因此所得的 $a'^{(1,0)}$, $e'^{(1,0)}$, …与 $a^{(1,0)}$, $e^{(1,0)}$, …的結果相同，即 $a'^{(1,0)}$ 只含周期項，$e'^{(1,0)}$ 含周期項和长期項，$\varepsilon_0'^{(1,0)}$ 含周期項、长期項和混合項，其他都只含长期項和周期項。根据这些結果，容易得出

$$a^{(1,1)}=\sum\left[\frac{\partial F(p,q)}{\partial q_j}\right]_0 q_j^{(1,0)}=\text{P. T.}+t(\text{P. T.}),\tag{9}$$

因此

$$a^{(1,1)}=a_0'+\text{P. T.}+t(\text{P. T.}).\tag{10}$$

于是我們就得到半长徑 a 的二阶摄动，在討論三体問題时，只含有周期項和混合項，这就是柏松定理。

2. 如果要考虑四体或多体問題，可以由上面的結果推广。現在簡单討論一下四体問題的情形。在四体問題中，半长徑 a 的二阶摄动有 $a^{(1,1,0)}$, $a^{(1,0,1)}$, $a^{(0,2,0)}$, $a^{(0,0,2)}$, $a^{(0,1,1)}$ 五項。如

$$a^{(0,2,0)}=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial F(p,q)}{\partial p_j}p_j^{(0,0,1)},\tag{11}$$

其中 p_j 仍为所討論行星的軌道根数；q_j, r_j 为两摄动行星軌道根数；$F(p,q)$ 与前面相同。則对各軌道根数的微商，除 a 外都是只含周期項，而且沒有常数項。至于各軌道根数的一阶摄动 $a^{(0,0,1)}$, $e^{(0,0,1)}$, …等，根据它們的微分方程式，与前面三体問題討論所得結果应完全相同，只是符号上有些差别，視摄动行星不同而相应改变。故代入(11)式后得到的結果应該还是只含周期項和混合項。

其他各項如 $a^{(1,1,0)}$, $a^{(0,0,2)}$,…等，求法也一样，可以得出同样結果，因此柏松定理还是能成立。

3. 如果要考虑三阶摄动，問題就更复杂，到現在为止，还沒有最后得出結論。柏松第一个研究这个問題[1]，他直接用軌道根数的变分法，仍认为沒有长期項存在。后来阿雷杜 (Haretu) 証明了半

[1] Poisson: Mémoires de l'Academie de Sciences, Tom. I, p. 55～61, 1816.

长徑的第三阶摄动有长期项存在❶，但并沒有得出具体的値。不久，厄吉里提斯（Eginitis）❷計算出长期項的数值約为 $-2.065\times10^{-17}at$。

勒沃里叶也发現另一个 t^2 的长期項❸，系数更小。一直到最近，美符諾瓦（Meffroy）又发现了一长期项，是用正則根数为基础得到的。在其中略去了 $\frac{a}{a'}$ 的七次幂，偏心率的三次幂，并假定行星在一平面上运动，则 a 的三阶摄动有长期项为❹❺

$$\frac{3^3\times11}{2^6}m'^2t\frac{a'^{7\,2}}{a'^{9}}e'^2\sin(2\omega-2\omega').$$

因此，长期項的存在是沒有什么問题了。

至于四阶和高阶摄动，还沒有人研究过，是否有长期項，还成問題。因此，关于太阳系的稳定性問題，从天体力学观点看来，还没有解决。就算以后各阶摄动都有长期項，也有可能表示周期函数。有待将来研究。

§8 特別摄动計算方法

前面所討論的摄动理論，是采用分析方法，所得到的摄动坐标或軌道根数是时間 t 的函数。根据这些结果，可以求出行星在相当长一段时間内的坐标或軌道根数，这样的方法叫普遍摄动方法。到目前为止，这种方法已出現了很多种，但它們都有缺点。特別是当

---

❶ Haretu: Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires, Tom. 18, 1885.

❷ Eginitis: Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires, Tom. 19, 1889.

❸ Leverrier: Annales de l'Observatoire de Paris, Tom. XI.

❹ Meffroy: Comptes Rendus de la Academie de Sciences de Paris, 240, No. 10, p. 1054～1056, 1955.

❺ Meffroy: Bulletin Astronomique. 2 Series, Tom. XIX, p. 1～200, 1955.

行星的軌道偏心率，傾角較大时，問題就难于甚至不能解决。对于一些小行星或彗星，它們的偏心率和傾角都很大，而所受到的摄动也很大，如果不算出它們的摄动，在短期內就会失掉。因此，有人想到用数字积分方法来求它們具体时刻的摄动坐标或軌道根数数值，也就是用微分方程的数字解的方法。

高斯第一次考虑这一种方法，但并沒有成功。第一次提出完整的方法是科威耳(Cowell)和克罗美林(Crommelin)。他們討論直角坐标的摄动，利用一种所謂"外推法"来作，这种方法叫做第一科威耳方法。后来发現有一些缺点，改正后得到一种叫第二科威耳方法。后来又因这种方法的逐步近似步驟很长，由努梅罗夫(Нумеров)提出一种特殊坐标，并造出了計算表，使得計算簡化，到現在还常用它来計算摄动。另一种方法是由恩克提出，是計算摄动直角坐标和无摄动直角坐标的差。还有一种方法是計算軌道根数的摄动，以拉格朗日行星运动方程为基础。下面就把这些方法作較簡单的介紹。

一、第一科威耳方法

行星摄动方程为

$$\ddot{x}=-\frac{k^2x}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial x},\quad \ddot{y}=-\frac{k^2y}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial y},\quad \ddot{z}=-\frac{k^2z}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{1}$$

摄动函数 R 也用直角坐标来表示，可以同时考虑几个行星的摄动。

(1) 式的自变量为 t，設历元为 $t_0=a$，用 w 表示时間間隔的单位。令

$$x=f(t)=f(a+nw), \tag{2}$$

其中 n 表示任意整数。也就是說，我們討論时間 t 按等間距 w 变化时的摄动。

对 n 取不同的值，可以得到 $f(a+nw)$ 的各次差，同內插法中的一样：

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & f(a-3w) & & f^{\mathrm{II}}(a-3w) & & \\
 & {}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{5}{2}w\right) & & f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{5}{2}w\right) & & f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{5}{2}w\right) & \\
{}^{\mathrm{II}}f(a-2w) & & f(a-2w) & & f^{\mathrm{II}}(a-2w) & & f^{\mathrm{IV}}(a-2w) \\
 & {}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{3}{2}w\right) & & f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{3}{2}w\right) & & f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{3}{2}w\right) & \\
{}^{\mathrm{II}}f(a-w) & & f(a-w) & & f^{\mathrm{II}}(a-w) & & f^{\mathrm{IV}}(a-w) \\
 & {}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}w\right) & & f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}w\right) & & f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}w\right) & \\
{}^{\mathrm{II}}f(a) & & f(a) & & f^{\mathrm{II}}(a) & & f^{\mathrm{IV}}(a) \\
 & {}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}w\right) & & f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}w\right) & & f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}w\right) & \\
{}^{\mathrm{II}}f(a+w) & & f(a+w) & & f^{\mathrm{II}}(a+w) & & f^{\mathrm{IV}}(a+w) \\
 & {}^{\mathrm{I}}f\left(a+\frac{3}{2}w\right) & & f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{3}{2}w\right) & & f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{3}{2}w\right) & \\
{}^{\mathrm{II}}f(a+2w) & & f(a+2w) & & f^{\mathrm{II}}(a+2w) & & f^{\mathrm{IV}}(a+2w) \\
 & {}^{\mathrm{I}}f\left(a+\frac{5}{2}w\right) & & f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{5}{2}w\right) & & f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{5}{2}w\right) & \\
 & & f(a+3w) & & f^{\mathrm{II}}(a+3w) & &
\end{array}
$$

其中 ${}^{\mathrm{II}}f(a)$，${}^{\mathrm{I}}f(a)$等为二次和以及一次和。关系为

$$
\left.\begin{aligned}
&{}^{\mathrm{I}}f\left(a+\frac{1}{2}w\right)-{}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}w\right)=f(a),\cdots,\\
&{}^{\mathrm{II}}f(a+w)-{}^{\mathrm{II}}f(a)={}^{\mathrm{I}}f\left(a+\frac{1}{2}w\right),\cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{3}
$$

如果 nw 不大，可以按泰勒級数展开为

$$
\begin{aligned}
f(a+nw)=f(a)+nw\frac{df(a)}{da}+\frac{n^2w^2}{2!}\frac{d^2f(a)}{da^2}\\
+\frac{n^3w^3}{3!}\frac{d^3f(a)}{da^3}+\cdots.
\end{aligned}\tag{4}
$$

以 $n=+1$ 和 -1 代入，相加可得

$$
\begin{aligned}
&f(a+w)+f(a-w)\\
&\quad=2f(a)+\frac{2}{2!}w^2\frac{d^2f(a)}{da^2}+\frac{2}{4!}w^4\frac{d^4f(a)}{da^4}+\cdots,
\end{aligned}
$$

即

$$f^{\mathrm{II}}(a)=\frac{2}{2!}w^2\frac{d^2f(a)}{da^2}+\frac{2}{4!}w^4\frac{d^4f(a)}{da^4}+\cdots. \tag{5}$$

令

$$F(a)=w^2\frac{d^2f(a)}{da^2}=-w^2\frac{k^2f(a)}{r_0^3}+w^2\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_0, \tag{6}$$

其中 r_0 为 $t=a$ 时 r 的值，$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_0$ 为 $\frac{\partial R}{\partial x}$ 在 $t=a$ 时的值，则得

$$f^{\mathrm{II}}(a)=F(a)+\frac{2}{4!}w^2\frac{d^2F(a)}{da^2}+\frac{2}{6!}w^4\frac{d^4F(a)}{da^4}+\cdots. \tag{7}$$

再根据斯特林(Stirling)内插公式知

$$f(a+nw)=f(a)+nf^{\mathrm{I}}(a)+\frac{n^2}{2!}f^{\mathrm{II}}(a)+\frac{n(n^2-1)}{3!}f^{\mathrm{III}}(a)+\cdots. \tag{8}$$

$F(a+nw)$ 也有同样的式子。根据(8)式不难得出

$$\left.\begin{aligned}
w^2\frac{d^2F(a)}{da^2}&=F^{\mathrm{II}}(a)-\frac{1}{12}F^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{1}{90}F^{\mathrm{VI}}(a)+\cdots,\\
w^4\frac{d^4F(a)}{da^4}&=F^{\mathrm{IV}}(a)-\frac{1}{6}F^{\mathrm{VI}}(a)+\cdots,\\
w^6\frac{d^6F(a)}{da^6}&=F^{\mathrm{VI}}(a)-\cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

以(9)式代入(7)式可得

$$\begin{aligned}
f^{\mathrm{II}}(a)&=F(a)+\frac{1}{12}F^{\mathrm{II}}(a)-\frac{1}{240}F^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{31}{60480}F^{\mathrm{VI}}(a)-\cdots\\
&=F(a)+\varphi(a),
\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\varphi(a)=\frac{1}{12}F^{\mathrm{II}}(a)-\frac{1}{240}F^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{31}{60480}F^{\mathrm{VI}}(a)-\cdots. \tag{11}$$

(10)式也就是

$$f(a+w)-f(a)+f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}w\right)+F(a)+\varphi(a). \tag{12}$$

(10), (11), (12)就称为科威耳的基本方程式，根据这些式子，可以用逐步近似法来計算摄动坐标。計算步驟如下：

如果已知 $f(a-w)$, $f(a)$；即已知在 $t=a$, $t=a-w$ 时的坐标数值。利用它們的差可得到 $f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}w\right)$；$F(w)$, $F(a-w)$，可以从(5)式求出。摄动行星的坐标，可以从大行星的直角坐标表❶中查得。

第一步令 $\varphi(a)=0$，則(12)式右端其他各項都已經知道，可求出 $f(a+w)$；代入(5)式求出 $F(a+w)$；連同 $F(a)$, $F(a-w)$，可求出 $F^{\mathrm{II}}(a)$。于是令

$$\varphi(a)=\frac{1}{12}F^{\mathrm{II}}(a),$$

代入(12)式修正 $f(a+w)$ 的值。

然后用同样方法，根据 $f(a)$, $f(a+w)$ 来求出 $F(a+w)$ 以及 $F(a+2w)$。根据 $f(a)$, $f(a-w)$ 幷利用公式

$$f^{\mathrm{II}}(a-w)=F(a-w)+\varphi(a-w) \tag{13}$$

可以求出 $f(a-2w)$，求法如下：

先令 $\varphi(a-w)=0$，則再得到 $f^{\mathrm{II}}(a-w)$，而

$$f^{\mathrm{II}}(a-w)=f(a-2w)+f(a)-2f(a-w),$$

因此得到 $f(a-2w)$；再从它得到 $F(a-2w)$，由此可得 $F^{\mathrm{II}}(a-w)$。再令

$$\varphi(a-w)=\frac{1}{12}F^{\mathrm{II}}(a-w),$$

代入(13)式得到 $f^{\mathrm{II}}(a-w)$ 的修正值，也即得到 $f(a-2w)$ 的修正值，幷重新得到 $F(a-2w)$。由 $F(a-2w)$, $F(a-w)$, $F(a)$, $F(a+w)$, $F(a+2w)$ 可以得到 $F^{\mathrm{IV}}(a)$，因此可以令

---

❶ 参看 Astronomical Papers, Tom. XX～XXIV.

$$\varphi(a)=\frac{1}{12}F^{\mathrm{II}}(a)-\frac{1}{240}F^{\mathrm{IV}}(a),$$

代入(12)式再得到$f(a+w)$的修正值。重新再来求$f(a+2w)$，$f(a-2w)$；然后再用它們来求$f(a+3w)$，$f(a-3w)$。如此继續下去，一直求到所需时刻的坐标$f(a+nw)$为止。这就是第一科威耳方法。一般把基本公式写为

$$F(a+nw)=-w^2k^2\frac{f(a+nw)}{r_n^3}+w^2\left(\frac{\partial R}{\partial f}\right)_n,$$

$$f[a+(n+1)w]=2f(a+nw)-f[a+(n-1)w]$$
$$+F(a+nw)+\varphi(a+nw),$$

$$\varphi(a+nw)=\frac{1}{12}F^{\mathrm{II}}(a+nw)-\frac{1}{240}F^{\mathrm{IV}}(a+nw)+\cdots,$$

其中$f(a+nw)$代表x_n，y_n或z_n，即x，y，z对应于时刻$a+nw$的坐标。第一科威耳方法是可以根据两个相邻的坐标計算出任何时刻$(a+nw)$的坐标。它的缺点是逐步近似过程中，步驟太多，要求出六次差，計算太繁。故科威耳后来改用二次和，只要到四次差就行了，这就是下面的第二科威耳方法。

二、第二科威耳方法

由于上述的缺点，科威耳引出了二次和。从二次和的定义不难証明

$$\left.\begin{aligned}f(a+nw)&={}^{\mathrm{II}}F(a+nw)+\varphi(a+nw),\\ \varphi(a+nw)&=\frac{1}{12}F(a+nw)-\frac{1}{240}F^{\mathrm{II}}(a+nw)\\ &\quad+\frac{31}{60480}F^{\mathrm{IV}}(a+nw)-\cdots.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

根据(14)式，近似过程就可以减少，計算方法如下：

根据已知坐标$f(a-w)$，$f(a)$，首先求出近似值：

$${}^{\mathrm{II}}F(a-w)=f(a-w)-\frac{1}{12}F(a-w),$$

$$^{II}F(a)=f(a)-\frac{1}{12}F(a).$$

也就是先令 $\varphi(a)=\frac{1}{12}F(a)$，$\varphi(a-w)=\frac{1}{12}F(a-w)$.

再由 $^{II}F(a-w)$，$^{II}F(a)$得到 $^{I}F\left(a-\frac{1}{2}w\right)$；根据

$$^{II}F(a+w)=\,^{II}F(a)+\,^{I}F\left(a-\frac{1}{2}w\right)+F(a)$$

求出 $^{II}F(a+w)$，并根据 $F(a-w)$，$F(a)$直接外推得到 $F(a+w)$.由此可得

$$f(a+w)=\,^{II}F(a+w)+\frac{1}{12}F(a+w).$$

再用
$$F(a+w)=-w^2k^2\frac{f(a+w)}{r_1^3}+w^2\left(\frac{\partial R}{\partial f}\right)_1$$

修正 $F(a+w)$ 的值。然后根据 $F(a-w)$，$F(a)$，$F(a+w)$ 求出 $F^{II}(a)$. 可令

$$\varphi(a)=\frac{1}{12}F(a)-\frac{1}{240}F^{II}(a),$$

用它修正 $F^{II}(a)$.

用上面同样方法外推得到 $^{II}F(a-2w)$，$F(a-2w)$，由此可得 $F^{II}(a-w)$. 令 $\varphi(a-w)=\frac{1}{12}F(a-w)-\frac{1}{240}F^{II}(a-w)$，修正 $^{II}F(a-w)$.

再继續求 $f(a+2w)$，$F(a+2w)$，可得 $F^{IV}(a)$，用它修正上面所求的各量，只用到 $F^{IV}(a)$就行了，不需要高次差。因此可继續往下推，直到所需要的时刻为止.

这样是比第一种威耳方法要减少一些步驟，但也还相当复杂。以后努梅罗夫提出一种所謂“特殊坐标”，使得計算方法更加簡化。

三、努梅罗夫方法

根据摄动运动方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x},$$

将各项乘上 w^2，定义特殊坐标 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = x - \frac{1}{12}w^2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{12}w^2\frac{\partial R}{\partial x}, \tag{15}$$

即

$$\bar{x} = x\left(1+\frac{w^2k^2}{12r^3}\right). \tag{16}$$

計算 $\bar{x}$ 的值，求出后再反过来求 x. 近似步驟要比科威耳方法簡单，而且它还有輔助表。如果时間間隔 w 取得恰当，可以使 $\varphi(a+nw)$ 非常小。

前面三种方法都是以直角坐标为基础。当行星或彗星离太阳近时，直角坐标变化很快，用上面的外推法就需要高次差，計算过程更复杂。但軌道本身的变化仍然同离太阳远的天体差不多，因此可考虑直接計算軌道根数的摄动。

四、軌道根数的摄动計算方法

这个方法是先把摄动力分解为三个分量。設坐标原点取在太阳 S；P 为被摄动行星。取 $\vec{SP}$ 为 ξ 軸；$\xi\eta$ 平面表示 P 的軌道平面；ζ 为法綫方向；則 P 的坐标为 $(r, 0, 0)$. 設另一摄动行星 P_1 的坐标为 ξ_1, η_1, ζ_1；质量为 m_1；則摄动力在三个坐标軸上的分量为

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= k^2m_1\left(\frac{\xi_1 - r}{\Delta_1^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3}\right) = k^2m_1\left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\xi_1 - k^2m_1\frac{r}{\Delta_1^3},\\
T_1 &= k^2m_1\left(\frac{\eta_1}{\Delta_1^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3}\right) = k^2m_1\left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\eta_1,\\
W_1 &= k^2m_1\left(\frac{\zeta_1}{\Delta_1^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3}\right) = k^2m_1\left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\zeta_1,
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中
$$\Delta_1^2=(\xi_1-r)^2+\eta_1^2+\zeta_1^2,$$
$$r_1^2=\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2.$$

令

$$(S_1)=\frac{1}{k\sqrt{p}}S_1,\ (T_1)=\frac{1}{k\sqrt{p}}T_1,\ (W_1)=\frac{1}{k\sqrt{p}}W_1; \tag{18}$$

$$K_1=\frac{wk''m_1}{\sqrt{p}}\left(\frac{1}{\Delta_1^3}-\frac{1}{r_1^3}\right). \tag{19}$$

则

$$\left.\begin{aligned}
&w\csc 1''(S_1)=K_1\xi_1-\frac{wk''m_1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{r}{\Delta_1^3},\\
&w\csc 1''(T_1)=K_1\eta_1,\\
&w\csc 1''(W_1)=K_1\zeta_1.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

根据这些式子，再用直角坐标同軌道根数之間的微分关系，并根据摄动运动方程可以得出

$$\left.\begin{aligned}
&da=2a^2(S_1)\sin\varphi\sin f dt+2a^2\left(\frac{p}{r}\right)(T_1)dt,\\
&dn=-\frac{k}{\sqrt{a}}(S_1)\sin\varphi\sin f dt-\frac{3k}{\sqrt{a}}\cdot\frac{p}{r}(T_1)dt,\\
&d\varphi=a\cos\varphi(S_1)\sin f dt+a\cos\varphi(\cos E+\cos f)(T_1)dt,\\
&d\tilde{\omega}=-p(S_1)\csc\varphi\cos f dt+\csc\varphi(p+r)\sin f(T_1)dt,\\
&di=r\cos u(W_1)dt,\\
&d\Omega=r\sin u\csc i(W_1)dt,
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

其中　　$u=\omega+f,\quad p=a(1-e^2),\quad \sin\varphi=e.$

如取时間单位为 w，在单位时間內的变化为

$$w\frac{da}{dt},\ w\frac{dn}{dt},\ \cdots,$$

各用記号 δa，δn，…表示；再把 (S_1)，(T_1)，(W_1)，还原成 S_1，T_1，W_1，則得

$$\left.\begin{aligned}
\delta M_0 &= -(2\cos\varphi r \operatorname{ctg}\varphi\cos f)S_1 - \operatorname{ctg}\varphi(p+r)\sin f T_1,\\
w\delta n &= -\frac{kw}{\sqrt{a}}\sin\varphi\sin f S_1 - \frac{3kw}{\sqrt{a}}\frac{p}{r}T_1,\\
\delta\tilde{\omega} &= -p\csc\varphi\cos f S_1 + \csc(p+r)\sin f T_1\\
&\quad + r\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}W_1,\\
\delta\Omega &= r\sin u\csc i W_1,\\
\delta i &= r\sin u W_1,\\
\delta\varphi &= a\cos\varphi\sin f S_1 + a\cos\varphi(\cos E+\cos f)T_1.
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

对于每一个軌道根数的擾动 δM_0、…，根据(22)式可用前面讲过的方法去求出它們在所要求时刻的値。

从上面我們可以看出，科威耳方法仍然是各种方法的基础。在特別擾动計算中，时間单位 w 取得愈小愈好，但愈小則計算就愈复杂。在一般的精确討論中，时間单位取为 2～8 天；在粗略的討論中取为 80 天左右。

目前的擾动討論中，特别擾动方法应用得很广。近年来由于計算技术的发展，电子計算机的出現，用特別擾动更有利。最近对五个外行星(木星、土星、天王星、海王星、冥王星)已用电子計算机根据第二科威耳方法算出了它們 200 多年內的直角坐标❶。这是每隔 40 天算一个位置，但取到六次差，准确到九位小数，作为以后天文年历的根据。小行星擾动中也广泛利用特別擾动方法。現在用来編制微星星表的十个小行星，正在苏联理論天文研究所用特別擾动算它們的正确坐标。

§9 小行星运动理論

小行星的质量小，在討論太阳和另一大行星对它的吸引时，可以不考虑小行星对其他行星的吸引。但另一方面，小行星的軌道

❶ 參看 Astronomical Papers, Vol. XXIII, 1955.

偏心率和傾角較大，在大行星吸引下变化得快，因此也增加了很多麻煩，一般大行星应用的方法都不能用。到現在为止，常用下列三类方法研究小行星的运动。詳細的討論將在以后的专門化課程中进行，这里只提出大概的輪廓和結論。

一、普遍摄动方法

最初討論小行星的方法是用所謂“普遍摄动”方法，即所得的小行星受摄动后的坐标或軌道根数表示为时間 t 的函数。如果求出以后，就可以得到任何时刻的小行星位置和軌道，而且还可以根据这些結果来推断小行星軌道在長时期內的变化。重要的有下列三种方法：

恩克方法是求直角坐标的普遍摄动，就是从(5-8-1)式出发，求出直角坐标的展开式(用級数解法)。这种方法所得的展开式收斂得太慢，而且对时間 t 的收斂域太小，故未能广泛地被采用。近年来由于大型計算机出現，才又引起人們的注意。

赫耳方法是把(5-8-1)式轉換成极坐标的形式，然后再求出极坐标下的展开式。但有恩克方法同样的缺点。

韓申方法是用一种新的概念来解决这一問題。他用改正自变量的办法，来求小行星受到摄动后的黄道球坐标。这比上面两种方法应用的范圍都要广些。

上述三种方法都还不能广泛应用于所有的小行星。由于小行星的軌道特殊，用上面方法得到的展开式收斂都較慢。例如：勒沃(Leveau)曾用韓申方法計算第四号小行星的普遍摄动，仅計算結果在刊物上就登載了800頁❶，計算共費了25年的时間。因此这些方法还有待今后改进。

二、特別摄动方法

在普遍摄动方法发展的过程中，又提出了用数字积分法为基

---

❶ Leveau: Annales de l'Observatoire de Paris, Tom. 15, 17, 20.

础的特别摄动方法，即上节所讲的方法。

特别摄动方法的好处有两个：一是不管小行星的軌道情况如何，都可以計算得很正确；二是步驟虽多，但很单純，故适用于大型計算机計算。因此，如需要小行星在某些时刻内的正确位置时，都采用特别摄动方法計算。例如在1931年利用小行星433号（爱神星）定太阳視差时，就是用特别摄动方法計算出爱神星在當时的准确位置。最近，苏联倡議的用小行星观測来定微星星表的系統差的工作中所选择的10个小行星，由苏联理論天文研究所用特别摄动方法計算它們的准确位置。

但是特别摄动方法只能得到小行星在某确定时刻的坐标数值，而不能得到分析表达式，故不能討論小行星的軌道在較长时間内的变化。

三、勃倫德耳和波林方法

因为上述的两类方法都很繁，若沒有現代化的大型計算机，则求小行星摄动的速度就很慢。但自19世紀后期以来，发現的小行星数量迅速增加，如果不能很快算出它們所受大行星的摄动，就可能丢失。因此向天体力学家們提出一个問題：寻找一种能迅速大量計算小行星摄动的方法，精确度差一些也不要紧，只要保証对它們能継續观測就行。在19世紀末和20世紀初出現的勃倫德耳和波林(Bohlin)方法就是为了解决这个問題。

这两个方法都是从小行星群出发、計算出小行星的普遍摄动。他們把平均每日运动相近（也就是軌道半長徑相近）的小行星作为一群，对同一群的小行星有共同的公式和系数表，因此可以很快算出大量小行星的摄动。

勃倫德耳方法是計算小行星的軌道根数的摄动[1]。在展开式中只取了几个主要項，在短期内就得到了赫斯帝亚群(Hestia

[1] Brendel: Astronomische Nachricht, Tom. 224.

group)，平均每日运动在 800″ 到 900″ 之間的几百个小行星的近似摄动，但是这个方法所得到的摄动的精确度太差，因此对其他的小行星群还沒有应用。

波林方法要准确些，但也要复杂些。波林本人在提出他的方法时就制定了赫斯吉亚群（平均每日运动接近 900″）的系数表❶，引起了人們的注意。后来由威耳逊（Wilson）制定了米涅尔伐群（Minerva group，$n\sim750''$）的系数表❷。柴倍耳（Цейпель）又制定了赫古巴群（Hecuba group，$n\sim600''$）小行星的系数表。最后由在上海佘山观象台工作的魏耳馬克（Villemarqué）制定了匈牙利群（Hungaria group，$1200''<n<1300''$）的系数表❸。这样一来对絕大多数的小行星，都可以用波林方法很快地算出它們的近似普遍摄动了。

波林方法只能算近似摄动，对編制小行星的“寻星星历表”是足够了，但对軌道接近木星的小行星群，效果还是不好。

§ 10　限制性三体問題

討論小行星、彗星和其他质量非常小的天体，在太阳和一个大行星吸引下的运动时，可以把小天体的质量作为无限小。从力学观点来說，就是可以忽略小天体对太阳和大行星的吸引。討論这种情况下的三体运动，称为限制性三体問題。一般情况是把两个大质量天体称为有限质量体。因为不考虑小天体对它們的吸引，故它們的运动仍为二体問題，軌道为圓錐曲綫。因此，限制性三体問題中，只討論小天体的运动。如果两个有限质量体的軌道为圓，

❶ Bohlin: Annales de l'Observatoire de Stockholm, Tom. 7.

❷ Wilson: Publication of Stockholm Observatory, Vol. 10.

❸ Villemarqué: Annales de l'Observatoire de Zô-Sè（佘山天文台年刊），Tom. 19, 21.

則此問題称为圓型限制性三体問題；同样，如果两个有限质量体的軌道为双曲綫或拋物綫，則称为双曲綫型限制性三体問題或拋物綫型限制性三体問題；如果有限质量体的軌道为橢圓，則称为橢圓型限制性三体問題。

1. 現在来討論圓型限制性三体問題．令两个有限质量体的质量和为 1，設其中一个天体质量为 μ，則另一体的质量为 $1-\mu$，不妨設 $\mu\leq\frac{1}{2}$．以两个有限质量体的质量中心为坐标原点，它們的运动平面（ξ-η）作为坐标平面。設质量为 μ 的天体坐标为 $(\xi_2, \eta_2, 0)$，质量为 $1-\mu$ 的天体坐标为 $(\xi_1, \eta_1, 0)$，小天体坐标为 (ξ, η, ζ)；小天体到质量为 $1-\mu$ 和 μ 的天体的距离为 r_1，r_2．則

$$r_1=\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+\zeta^2},$$
$$r_2=\sqrt{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2+\zeta^2}.$$

因二个有限质量体的軌道为圓，故它們的距离为常数，就取它作长度单位；并取适当的时間单位，使万有引力常数 $G=1$．則由(1-2-1)式可得小天体的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi}&=-(1-\mu)\frac{\xi-\xi_1}{r_1^3}-\mu\frac{\xi-\xi_2}{r_2^3},\\ \ddot{\eta}&=-(1-\mu)\frac{\eta-\eta_1}{r_1^3}-\mu\frac{\eta-\eta_2}{r_2^3},\\ \ddot{\zeta}&=-(1-\mu)\frac{\zeta}{r_1^3}-\mu\frac{\zeta}{r_2^3}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

因两个有限质量体的相对运动为圓，故由克普勒第二定律知，它們的角速度为常数，設为 n．在我們所取的单位下 $n=1$．

現在来定义一种新的坐标系 (x, y, z)：原点仍为两个有限质量体的质量中心；x-y 平面同 ξ-η 平面相合；x 軸固定在两个有限质量体的联綫上，随着它們以均匀角速度 n 旋轉；y 軸为垂直方向，z 軸同 ζ 軸重合。設在时間 $t=0$ 时，x 軸同 ξ 軸重合（y 軸也

同 η 軸重合），則在时刻 t 时，x 軸和 y 軸轉了角度 $nt=t$，此时新旧坐标之間的关系为

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x\cos t-y\sin t,\\ \eta&=x\sin t+y\cos t,\\ \zeta&=z.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

代入(1)式得(因两个有限体在 x 軸上，故 $y_1=y_2=0$)

$$\left.\begin{aligned}&(\ddot{x}-2\dot{y}-x)\cos t-(\ddot{y}+2\dot{x}-y)\sin t\\ &\quad=-\left\{(1-\mu)\frac{(x-x_1)}{r_1^3}+\mu\frac{x-x_2}{r_2^3}\right\}\cos t\\ &\quad\quad+\left\{(1-\mu)\frac{y}{r_1^3}+\mu\frac{y}{r_2^3}\right\}\sin t,\\ &(\ddot{x}-2\dot{y}-x)\sin t+(\ddot{y}+2\dot{x}-y)\cos t\\ &\quad=-\left\{(1-\mu)\frac{x-x_1}{r_1^3}+\mu\frac{x-x_2}{r_2^3}\right\}\sin t\\ &\quad\quad-\left\{(1-\mu)\frac{y}{r_1^3}+\mu\frac{y}{r_2^3}\right\}\cos t.\\ &\ddot{z}=-(1-\mu)\frac{z}{r_1^3}-\mu\frac{z}{r_2^3}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

在(3)式中，以 $\cos t$ 乘第一式，$\sin t$ 乘第二式相加；再以 $\sin t$ 乘第一式，$\cos t$ 乘第二式相加得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}&=x-\frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_1^3}-\mu\frac{x-x_2}{r_2^3},\\ \ddot{y}+2\dot{x}&=y-\frac{(1-\mu)y}{r_1^3}-\mu\frac{y}{r_2^3},\\ \ddot{z}&=-(1-\mu)\frac{z}{r_1^3}-\mu\frac{z}{r_2^3},\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

其中　$r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}$，$r_2=\sqrt{(x-x_2)^2+y^2+z^2}$.

(4)式为圆型限制性三体問題的基本方程，其中除所討論的变量 x, y, z, t 外，其余各量均为常数(x_1, x_2 也是常数)。而(1)式中还包含 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$，它們都是 t 的显函数，故(4)式較容易討論。

方程組为六阶，若完全解决，則要 6 个积分。

2．在(4)式中，如果令

$$U=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}, \tag{5}$$

則(4)式可写成

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}&=\frac{\partial U}{\partial x},\\ \ddot{y}+2\dot{x}&=\frac{\partial U}{\partial y},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial U}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

若以 $2\dot{x}$ 乘第一式，$2\dot{y}$ 乘第二式，$2\dot{z}$ 乘第三式相加得

$$2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z}=2\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}+2\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}+2\frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}=2\frac{dU}{dt}.$$

积分得

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2U-C, \tag{7}$$

其中 C 为积分常数。这个积分第一次由雅哥比导出[1]，故称为雅哥比积分。

(7)式在研究圓型限制性三体問題中非常重要。(7)式左端为小行星对坐标系的速度平方，如果它等于 0，则

$$2U-C=0. \tag{8}$$

这是一个曲面方程，叫做零速度面。討論零速度面的奇点，可以得到圆型限制性三体問題的特解。

3．現在来討論零速度面。(8)式应为

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}=\frac{C}{2}. \tag{9}$$

由于 C 为任意常数，故 C 取不同数值时，曲面的形状不同。但从(9)式可看出，由于左端各项都是正的，因此 C 只能取正数。下面

[1] Jacobi: Comptes Rendus de l'Academie de Paris, Tom. III, p. 591.

先定性地討論。

先取 $C=C_1$，数值非常大，則左端只可能有两种情形，一种情形是 x, y 很大，則曲面应成为离原点很远的一个閉曲面 S_1'；另一种情形是 r_1 或 r_2 很小，也就是曲面成为圍繞 μ 和 $1-\mu$ 的两个小的閉曲面 S_1。在图 23 中繪出了在 $x-y$ 平面上的截綫。若 C 逐漸减小，則外面那个大曲面 S_1' 应逐漸縮小，里面的两个小曲面就会扩大到相碰。設在相碰时 $C=C_2$，相碰的点叫 L_1，則 L_1 应为在 $C=C_2$ 时零速度曲面的自交点，此时外面的大曲面記为 S_2'。若 C 继續减小，則里面的曲面継續扩大，外面的曲面继續縮小，到一定程度时会相碰。設在 $C=C_3$ 时先在 μ 这边相碰，相碰的点 L_2 为 $C=C_3$ 时零速度面的自交点，相应的曲面 S_3' 与 S_3 就連在一起成一个曲面。C 再减小时，曲面继續收縮，到一定程度又会在 $1-\mu$ 这边相碰，設相碰的点 L_3 为 $C=C_4$ 时零速度面的自交点。如 C 再减小，則曲面分成两半后継續收縮，到一定程度时，上下两半都收縮成为一个点，叫 L_4 及 L_5，此时相应的 $C=C_5$。如 C 再减小，零速度面就不存在了。

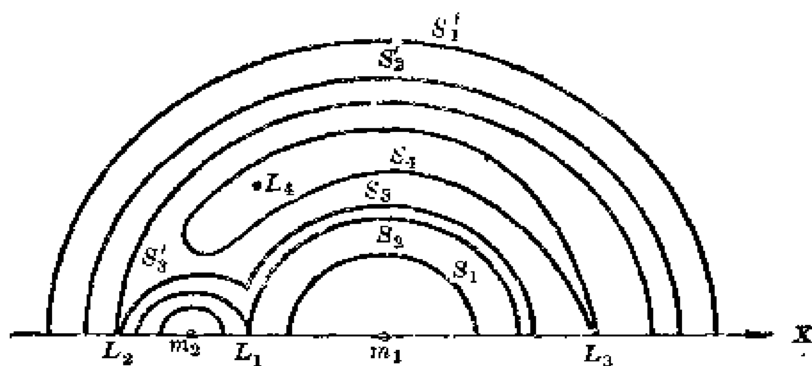


图 23

上面这样定性地討論，当然不严格，但所得結果可以通过計算来証实。上面的五个点：L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 都应該是零速度面的奇点。具体地讲，在这些点上不止有一条法綫，于是它們的坐标应

該滿足关系

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

因此我們可以用这三个关系式来解出它們的坐标。

根据 U 的定义得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=x-\frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_1)-\frac{\mu(x-x_2)}{r_2^3}=0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=y-\frac{1-\mu}{r_1^3}y-\frac{\mu}{r_2^3}y=0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{1-\mu}{r_1^3}z-\frac{\mu}{r_2^3}z=0. \tag{12}$$

滿足这三式的 (x, y, z) 即为 L_i 的坐标。首先从(12)式知

$$z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)=0.$$

但括号内的量都是正的，不可能为 0，只有 $z=0$. 也就是說，L_i 都在 xy 平面上，以 $z=0$ 代入(10)，(11)式，則 $r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}$，$r_2=\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}$. 再由(11)式得

$$y\left(1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}\right)=0,$$

故应有两种結果：一是

$$y=0. \tag{13}$$

即 L_i 在 x 軸上；另一种情况为：

$$1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}=0. \tag{14}$$

下面先討論 $y=0$ 的情形。以 $y=0$ 代入(10)式，由于此时

$$r_1=\sqrt{(x-x_1)^2}=(x-x_1), \quad r_2=\sqrt{(x-x_2)^2}=(x-x_2),$$

故(10)式成为

$$x-\frac{1-\mu}{(x-x_1)^3}(x-x_1)-\frac{\mu}{(x-x_2)^3}(x-x_2)=0. \tag{15}$$

由于坐标原点是两有限体的质量中心，故 x_1、x_2 中有一个为正，一个为負。設 $x_1<0$, $x_2>0$（如反过来也是一样）。令(15)式左端的函数为 $F(x)$，則应有

$$F(-\infty)=-\infty<0.$$

x 逐渐增大，由于 x 在区間 $(-\infty, x_1)$ 内，$F(x)$ 連續，而且 $\frac{dF}{dx}>0$，故 $F(x)$ 一直增加，但当 $x\to x_1$ 时，由于从小于 x_1 的方向趋近于 x_1，記为 $x=x_1-0$，而从(15)式知

$$F(x_1-0)=+\infty>0,$$

于是可知，在 $(-\infty, x_1)$ 内，必有一个 x 值滿足 $F(x)=0$ 为(15)式的解，而且由于 $\frac{dF}{dx}$ 在此区間内恒为正，故只有一个解。

用同样方法可以得出 $F(x)$ 在区間 (x_1, x_2)，$(x_2, +\infty)$ 内都有一个解，而且只有一个。也就是說，在 x 軸上应有三个解，分別記为 L_1, L_2, L_3，与上面定性方法討論的結果一致。

再考虑

$$1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}=0 \tag{14}$$

的情形。以(14)乘上 x，与(10)式相減即得

$$\frac{1-\mu}{r_1^3}x_1+\frac{\mu}{r_2^3}x_2=0.$$

但坐标原点为质量中心，如取向 μ 的方向为 x 軸正方向（反过来結果也一样），則 $1-\mu$ 的坐标 $x_1=-\mu$，μ 的坐标 $x_2=1-\mu$，代入上式得

$$-\frac{\mu(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3}=0,$$

即
$$r_1^3=r_2^3.$$

代入(14)可得 $r_1=r_2=1$.

而长度单位正好是两个有限体的距离，也就是所得到这点的位置正好是与两个有限体成等边三角形，記为 L_4，L_5．

这五点的坐标都已求出，满足(10)，(11)，(12)式。因代入运动方程(6)时，右端都是 0，但它們坐标又都是常数，故对 t 的微商应为 0，于是它們是满足方程(6)，为(6)式的五个特解。由于它們相对于旋轉坐标系为常数，称为秤动点，其中 L_1，L_2，L_3 都在 x 軸上，即与两个有限体成一直綫，故称为直綫解；L_4，L_5 与两个有限体成等边三角形，又称为等边三角形解。这五个点首先由拉格朗日发現，故称为拉格朗日秤动点。脫罗央（Trojan）群小行星的存在，是等边三角形解的一个驗証。而对于直綫解，有人认为对日照現象就是証明，但还沒有最后結論。

4．橢圓型限制性三体問題。在小行星运动理論中常用到它，但不用旋轉坐标，这里不作讲解。至于拋物綫和双曲綫型限制性三体問題，在天体力学中用得很少。近来在俘获理論中，用到双曲綫型限制性三体問題，是施米特的太阳系起源学說的基础，在本书中也不讲。

§ 11 月球火箭的运动

当严格地討論月球火箭的問題时，应考虑到太阳系各天体和各种其他因素的攝动。但根据月球火箭的具体情况，我們可以把問題簡化。在进行正式討論之前，先来說明一下作用范圍的概念。当火箭在运动时，它受到太阳和地球的引力，我們可以认为火箭受地球中心力的作用和太阳对它的攝动；也可以认为火箭是受太阳中心力的作用（即作日心运动），而受到地球的攝动。当在空間某一区域內，太阳的攝动力与地球的引力之比小于地球的攝动力与太阳引力之比时，这样的空間区域称地球相对于太阳的作用范圍。根据第二章 § 19，地球作用范圍的半徑为

$$r_* = A\left(\frac{m_1}{M}\right)^{\frac{2}{5}},$$

其中 m_1 为地球质量，M 为太阳质量，A 为地球到太阳的距离 $\overline{mM}$。

經过具体計算得 $r_* \doteq 930000$ 公里，它为地月距离 $a = 384400$ 公里的 2.5 倍。所謂月球火箭，它应該經过月球附近，即它的軌道完全处于地球作用范圍之內，因而太阳对火箭的摄动是很小的。太阳的摄动力最大是在地球作用范圍的边界上，設 $\Delta F'$ 为太阳的摄动力，F 为地球的引力。若在作用范圍边界上，則有

$$\frac{\Delta F'}{F} < \left(16\frac{m_1}{M}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad \text{即}\ \frac{\Delta F'}{F} < 0.138.$$

$\frac{\Delta F'}{F}$ 随着火箭离地球距离的减少而依 r^3 减少。若 r 为月球軌道半徑，則 $\frac{\Delta F'}{F} < 0.01$，所以在我們的問題中，近似地可以略去太阳的摄动，其他行星的摄动就更可以略去了。这样，月球火箭只在地球和月亮的引力場中运动，而火箭的质量与地、月的质量相比起来是非常微小的。月球繞地球运动的軌道为椭圓，因此問題归結为地球——月球——火箭的椭圓型限制性三体問題，因为月球的軌道很近于圓（它的偏心率 $e=0.0549$），所以可再簡化，把問題当作圓型限制性三体問題来考慮。

設火箭的质量为 m_0，地球质量为 m_1，月球质量为 m_2。运动坐标系則选 x 軸为从 m_2 到 m_1；y 軸在月球軌道平面上且通过 m_1, m_2 的质量中心，并垂直于 x 軸；z 軸垂直于 x, y 軸，組成右旋系統。在此坐标系下，火箭的运动方程为

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \ddot{y} = -2\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \ddot{z} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

这里
$$u = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{Gm_1}{r} + \frac{Gm_2}{\rho}.$$

G 为万有引力常数，r 和 ρ 为 m_0 分别到 m_1 和 m_2 的距离。上述方程等于 0 即为雅哥比积分。

$\frac{1}{2}V^2=u+h$。其中 h 为积分常数，由火箭的初始位置和初始速度所决定。

若在此积分中令 $V=0$，则我們得到一族曲面 $u=-h$。通常称为零速度曲面。而火箭的运动就被这个曲面所限制，不能穿越此曲面。另外，此曲面 $u=-h$ 由参数 h 所决定，若假設火箭的初始位置不变，则 h 就被 V_0 唯一决定。下面就根据这两性质定性地来討論火箭的运动。

$u=-h$ 的討論与上节一样，只是这里的 h 为上节的 $-C$，当 V_0 增加时，h 也增大，此时 S_2'，S_3' 扩大，而 S_2 縮小。V_0 增加到某一值 $V_0^{(1)}$ 时，S_2，S_2' 出現了交点 L_1，此时火箭便有可能从地球附近发射通过 L_1 点到达月球，$V_0^{(1)}$ 成为月球火箭的最小速度。当 V_0 继續增大时，S，S' 也继續扩大，当 V_0 增加到某一值 $V_0^{(2)}$ 时，S 和 S' 出現了交点 L_2，此时从地球发射的火箭就有可能經过月球后通过 L_2 点飞向无穷远（行星际空間）。所以要非常保險地要火箭成为月球的卫星或繞地球和月球旋轉，火箭的初始速度必須介于 $V_0^{(1)}$ 和 $V_0^{(2)}$ 之間。当 V_0 再增加时，还可以出現两个 V_0 值，$V_0^{(3)}$ 和 $V_0^{(4)}$，当 $V_0=V_0^{(3)}$ 时，S 和 S' 出現交点 L_3，此时在 L_1，L_2 处形成了一走廊，此时火箭除能从 L_2 处跑掉外，还可能在 L_3 处跑掉。当 $V_0=V_0^{(4)}$ 时，三个曲面 S，S'，S'' 全部收縮成以 x 軸为对称的两个点 L_4，L_5，此时火箭就能从任何方向跑掉。当 $h=0$ 时，限制火箭空間运动的曲面也就完全消失了。

根据地球和月球的具体数据，得到下面的表（見下頁）。

以上我們只是在理論上进行討論，在进行具体工作时，还可运用一种近似方法来研究，即在月球的作用范圍以內（相对于地球而言），只考虑月球的引力；在作用范圍以外，只考虑地球的作用。这

样就把三体問題簡化成二体問題来处理了。在月球火箭的研究上，苏联数学研究所的叶戈罗夫(Егоров)进行了全面的工作❶。

	r_i	ρ_i	h_i	$V_0^{(i)}\left(\frac{\text{km}}{\text{sec}}\right)$
L_1	0.8491539	0.1508461	−1.594067	10.84890
L_2	1.1677237	0.1677237	−1.585991	10.84968
L_3	0.9926263	1.9929263	−1.500062	10.85738
L_4(或 L_5)	1	1	−1.499001	10.85854

§12　摄动理論的新方法

前面所讲的内容，都是天体力学中发展較早的部分，也是較成熟的部分，它們是針对太阳系中的行星（特别是大行星）建立起来的理論，在天体力学中就叫做古典天体力学。正如大家所知，它已完成了所担負的历史使命，对大行星和一部分小行星及卫星，都可以用已有的方法来研究它們的摄动运动，并且符合观测。由于特别摄动方法的发展，加以近代的計算技术不断改进，对于观測所要求的精确度，一般都沒有什么困难了。

对于一部分小行星和大部分彗星和卫星，用特别摄动方法来計算它們在具体时刻的坐标是沒有什么困难的，但在理論上經常需要討論在一定时期內的軌道性质，这就必須用普遍摄动方法，可是古典天体力学的普遍摄动方法不能完全适用，特别不能适用下列四种情形：

(1) 行星(彗星或卫星，下同)的偏心率較大时；

(2) 行星和摄动行星之間軌道相互傾角相較大时；

(3) 行星和摄动行星的軌道半長徑之比接近于1时；

(4) 行星和摄动行星的平均运动之比接近于簡单分数时。

---

❶ Егоров: Успехи физических наук, Том. 7, 1956.

到19世紀六十年代，普耳科伐天文台台長格耳登就提出了解决这个問題的两个基本方向：(1)直接研究摄动函数展开式，寻找新的自变量，使得展开式能够克服上面的四种困难；(2)用另外的接近于实际情况的周期軌道来代替克普勒椭圓軌道，作为行星的近似軌道。这两个方向，就成为古典天体力学进一步发展的目标。不久以后，潘加来提出了一整套的周期軌道理論，另外再提出一个方向是天体力学定性理論，就是用微分方程的定性理論来研究天体軌道在相当長的时期内的演化、稳定性等。关于这个方向在这里不談，下面就把前两个方向作一些簡单的介紹。

一、摄动函数展开式收斂性改进問題

所有的普遍摄动方法，对上面提出的四个困难情况都不能解决，基本原因是摄动函数展开方法不好。在古典天体力学的展开方法中，是以各种近角点来作展开式的基本变量。所得到的展开式收斂范圍小，而且收斂得慢，必須寻找另外的展开方法。有很多人对第三个困难，即行星和摄动行星軌道半長徑之比（即前面的α）接近于1时，提出各种办法。

如不考虑其他的困难，我們就可以单純研究(5-3-2)式

$$D^{-s}=(1+\alpha^2-2\alpha\cos H)^{-\frac{2k+1}{2}}=(1+\alpha^2-2\alpha\cos H)^{-s}\qquad(1)$$

的展开式。按照以前的方法，它是用拉普拉斯系数进行展开，

$$D^{-s}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n^s\cos nH,\qquad(2)$$

B_n^s为拉普拉斯系数。一般說来，B_n^s与α^n同数量級，因此在α接近于1时，(2)式就收斂得很慢。在大行星中，对于木星同土星的情形，$\alpha=0.5445$，(2)式已經很不好用了，对更接近于木星軌道的小行星，困难就更大了。

早在1826年，勒让德尔(Legendre)想到用另外一个变量φ来代替H。φ的定义为

$$\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{1}{2}H\right)=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{tg}\frac{1}{2}H. \tag{3}$$

这就是著名的勒让德尔变换。用它来轉换(1)式，再按 φ 展开，所得展开式收斂得較快❶。但这个轉化非常复杂，这里不讲。

到 1870 年，格耳登想出了另外的方法，即利用椭圆函数来变换变数 H。令

$$\left.\begin{aligned} &H=\pi+2\operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi}T,\ k\right);\\ &k=\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha},\ k'=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 “am” 表示雅哥比椭圆函数中的 “Amplitude”；T 为新的变量，K 为以 k 为模的第一类完全椭圆函数。下面用到的 K' 为以 k' 为模的第一类完全椭圆函数。利用新变量 T 可以得

$$\sqrt{D}=(1+\alpha)\operatorname{dn}\left(\frac{K}{\pi}T,\ k\right), \tag{5}$$

其中 “dn” 为雅哥比椭圆函数的符号。于是利用它的性质可得

$$\frac{1+\alpha}{\sqrt{D}}=\frac{\pi}{k'K}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-q)^n}{1+q^{2n}}\cos nT, \tag{6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} q&=\exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right)\\ &=\frac{\beta}{2}+2\left(\frac{\beta}{2}\right)^5+15\left(\frac{\beta}{2}\right)^9+150\left(\frac{\beta}{2}\right)^{13}+\cdots,\\ \beta&=\frac{1-\sqrt{K'}}{1+\sqrt{K'}}=\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

于是

$$q=\left(\frac{\alpha}{4}\right)+4\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3+34\left(\frac{\alpha}{4}\right)^5+\cdots. \tag{8}$$

---

❶ 可参看 Legendre: Traité des fonctions elliptiques, Tom. II, Appendices.

从(6)式知，$D^{-\frac{1}{2}}$ 的展开式系数与 q^n 同数量級，而由(8)可以看出，q 与 $\frac{\alpha}{4}$ 同数量級。因此新的展开式要比以前的收斂得快，收斂范圍也大。

用同样的方法可以展开一般的 D^{-s}，只是更复杂些。

上面提出的勒让德尔和格耳登两种变换，都可以使摄动函数展开式的收斂性得到改进，但后者用起来要簡单些。两者所得結果很相似，格耳登本人也感到这点，但沒有去追究。直到 1924 年，勃倫德耳才証明这两个变换实际上是同一个。他并进一步利用这个变换得到了一套計算行星的摄动理論，改进了以前的格耳登方法。

到 1929 年以后，苏联的薩莫依洛娃-雅洪托娃(Самойлова-Яхонтова)利用勃倫德耳方法，并以 T 作自变量，研究了小行星 Tpule 受木星的摄动，結果很好。这里的 $\alpha=0.8193$，用古典方法几乎不能計算它的摄动。并且說明用 T 要比用 φ 更有利些。以后在她的另外两篇論文中，开始考虑行星的偏心率，并且还得到利用波林小行星群的方法計算摄动的公式。

至 1943 年以后，苏保金才开始考虑用普遍的三角級数理論来研究摄动函数展开問題，在 1947 年得到了初步結果。簡单地作如下介紹。

按照以前的方法，函数 $y=D^{-s}$ 展开为

$$y=D^{-s}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s \cos nH. \tag{9}$$

其中把因子 $\frac{1}{2}$ 合并到系数中去，如果令

$$\text{则}\qquad \left.\begin{aligned} z&=\exp\left(\sqrt{-1}H\right),\\ y&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s z^n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

这就是复变量的罗朗級数。它的收斂域为环 $\alpha<|z|<\alpha^{-1}$. 而根

据 z 的定义可知，我們所需要的是 $|z|=1$ 的情形，当然在收斂域内，故級数(10)应代表一个 z 的解析函数。但是当 α 接近于 1 时，級数的收斂域就很小，所討論的 z 就同奇点很接近，因此收斂得慢。如果能設法把級数(10)的收斂域变大，也就是要把所討論的 z 离奇点远一些，则級数的收斂性就可以改进。

苏保金用了两种变换，即綫性变换和二次变换❶。設一新复变量 w 定义为

$$w=\frac{z-a}{1-az}\tag{11}$$

或

$$w^2=\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(1-a_1z)(1-a_2z)},\tag{12}$$

用这两个变换来变换級数(10)。如果用綫性变换(11)，则 a 的最有效値为

$$a=\beta=\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}.\tag{13}$$

利用变换

$$w=\frac{z-\beta}{1-\beta z},\tag{14}$$

可以把級数(10)变换为

$$y=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n'w^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}B_n'^s\cos nS,\tag{15}$$

其中　　$w=\exp(\sqrt{-1}S)$.

(15)式的收斂性就要比以前的展开式好得多，它們的系数 $B_n'^s$ 与 β^n 同数量級，显然 $\beta<\alpha<1$，因此收斂得快，相应的收斂域为 $\beta<|w|<\beta^{-1}$。苏保金証明了 $B_n'^s$ 也可以用拉普拉斯系数来表示，只是参数不是 α，而是 β。并且还造出了它們的数値表。

---

❶ Субботин: Бюллетень институт теоретических институт, Том. IV, Nr. I, p. 1.

苏保金也初步研究了二次变换(12)，只要 a_1，a_2 的值取得有效，結果要比綫性变换更好，而且还証明了以前的勒让德尔变换也是二次变换的特殊形式，即

$$w^2=\frac{z(z-\alpha)}{1-\alpha z}. \tag{16}$$

苏保金的理論虽把所有的現成的方法都概括了，但到目前为止，还没有得到很有用的結果。

上面是关于 α 接近于 1 时所引起的困难。对于两行星相互交角較大时所引起的困难，很早就引起人們的注意。从前都是把摄动函数展开为 $\frac{\sin^2 I}{2}$ 的冪級数，在 I 較大时收斂得慢。蒂塞朗和巴克隆德(Баклунд)曾想到展开成 I 的正弦和余弦的某种組合函数的冪級数，但更繁，没有成功。

直到 1952 年，苏联的叶列涅夫斯卡娅(Еленевская)才提出一种新的方法❶。用多重三角級数方法，展开为 I 的三角級数，級数形式为

$$\frac{a'}{\Delta}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\sum_{p,q,r=-k}^{+k}e^n P_m^n A_{p,q,r}^{(n)}\cos\left[(p+m)M+p\omega+q\Omega+rI\right]. \tag{17}$$

在其中她創造出一种特殊函数来作为系数，并在 1957 年的論文中更把这个展开式推广到天体力学中較复杂的問題❷。目前还没有根据她的展开式建立一套摄动理論，还有待进一步研究。

至于其余两个困难，現有的摄动函数展开方法都还不能解决。

二、周期軌道理論

由于古典天体力学对很多問題不能解决，格耳登和潘加来提

---

❶ Еленевская: Бюллетень институт теоретических астрономии, Том. V, Nr. 2, 1952; Nr. 5, 1953.

❷ Еленевская: Бюллетень институт теоретических астрономии, Том. VI, Nr. 8, 1957.

出了周期軌道理論，当时引起了世界天体力学家們的重視，逐漸形成了天体力学中的一个分支。

其实在很早以前，拉格朗日提出的三体問題特解，即等边三角形解和直綫解，也就是周期軌道理論的一种。在当时沒有人想到把他的方法推广。第一个提出完整的周期軌道理論是潘加来，他提出了对于方程組

$$\dot{x}_i = X_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{18}$$

的周期解的理論。如果要对于 X_i 为任意函数来找出周期解，是非常困难。但如果 X_i 可以展开为某小量 μ 的級数，而且当 $\mu=0$ 时，方程組的解为周期解；則求出 $\mu\neq 0$ 时的周期解就比較容易，只要满足某些条件就行了。

潘加来把三体問題的周期解分为三类：第一类行星軌道傾角为 0，偏心率很小，与行星质量同数量級；第二类中偏心率为任意行星軌道傾角亦为 0；第三类中傾角与偏心率都为任意值。在第二类和第三类中，設两行星的平均运动之比为简单分数，即为通約情形，也就是

$$\frac{n'}{n}=\frac{p}{q}. \tag{19}$$

其中 p, q 为互质的整数。

对于第一、二类周期解，只要满足一些条件，周期解是可以存在的。对于第三类还沒有人作很好的研究，以后由赫耳、施瓦尔兹席耳德 (Schwarzschild) 等継續研究并初步应用到小行星群，結果并不好，其原因可能是他們在摄动函数展开中丢掉了一切短周期项。

由于周期軌道理論引起了大家重視，而且又似乎可以解决小行星运动中的困难問題，在 1936 年，于哥本哈根天文台召开的一次国际会議上，就提出了一个研究限制性三体問題的周期解的計

划。题目是假定两有限体 m_1，m_2 质量相等，彼此互繞作圓周运动，第三体质量为无限小，在同一平面上运动，要求找出下列三类周期解：

(1) 圍繞两个有限体之一的周期軌道；

(2) 同时圍繞两个有限体的周期軌道；

(3) 圍繞拉格朗日秤动点的周期軌道和漸近軌道。

这些問題称为"哥本哈根問題"，包括每种軌道的发展和演化。但問題提出后，有很多天文学家和数学家对此进行研究，但到現在为止都还沒有解决。

既然周期軌道不能直接解决問題，有人想到把它同数字积分法联系起来，并且利用拉格朗日行星运动方程得出軌道根数的变分方程，用一种周期軌道来做"中間軌道"，再根据它来求具体小行星軌道的改正，这些改正为变分方程。可以用数字积分方法来求出，这方面工作为苏联切波塔列夫完成，得到了 Hecuba 群，Hilda 群和 Trojan 群小行星的周期軌道，結果同观測比較，相差还不多，当然还不够理想。对于 Hilda 群小行星，还研究了它們在前后几千年的軌道演化，这些工作都有待继續改进。

习　　题

1. 在討論四体問題时，二阶摄动一共有哪些項？

$$(对\ p_i^{(j,k,l)},\ q_i^{(j,k,l)},\ r_i^{(j,k,l)})$$

2. 如反过来討論摄动行星的摄动运动，則摄动函数有哪些改变？展开后的形式怎样？

3. 試用哥西数展开 E，f 为平近点角 M 的三角級数；并把展开結果与第二章中用白塞耳函数及拉格朗日級数展开的結果比較。

4. 試利用超几何級数的微分方程

$$(x-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}+[C-(A+B+1)x]\frac{dF}{dx}-ABF=0,$$

推出拉普拉斯系数的微分方程

$$(\alpha^2-\alpha^4)\frac{d^2B_s^i}{d\alpha^2}+[\alpha-\alpha^3(4s+1)]\frac{dB_s^i}{d\alpha}-[4\alpha^2s^2-i^2(1-\alpha^2)]B_s^i=0.$$

5. 利用贝西数展开 $\cos nE$, $\sin nE$ 为 M 的三角級数。

6. 如果被摄动行星和摄动行星的平均运动 n, n' 为严格通約，即 $\frac{n}{n'}=\frac{p}{q}$，形式上看来，摄动函数展开后进行积分的結果，会出現分母为 0 的項。試說明在这样的情况下，是否能用这种方法来研究摄动运动？

7. 試說明泊松項对时間 t 积分后仍然只出現泊松項及周期項，不会出現长期項。

8. 求出努梅罗夫的特殊坐标表示的摄动运动方程式。

9. 試說明圆型限制性三体問題中得到的雅可比积分的力学意义。

第六章　月球运动理論

牛顿万有引力定律的提出，首先是被用来研究月球运动的，但限于当时数学和力学的水平，沒有能够完成这項工作。以后随着数学和力学的发展，很多科学家都在进行月球运动的研究。到19世紀末，共約提出了几十种研究方法，其中較好的有十几种，研究方法大体可分为下列四类：

第一类方法以月球向徑、經度、緯度作为基本变量，用时間作自变量；以椭圓作为运动的第一次近似，然后逐步进行修正。早期的卢伯克(Lubbock)方法、德·彭德古朗(de Pondécoulant)方法等属于此类。

第二类方法所取的变量与第一类相同，但用經度作为自变量；把时間，向徑和緯度表为經度的函数，最后再反回来求任何时刻的坐标。用这种方法的人是克雷諾、达朗貝尔、达莫索瓦(Damoiseau)、拉普拉斯和普兰納(Plana)等。

第三类方法是用密切椭圓軌道根数作为基本变量，仍以时間为自变量；或把椭圓軌道根数改变一些形式，使它們成为正則共軛变量，解出后再化为坐标。用这种方法的主要是欧拉、柏松、韓申以及德洛納等。

第四类方法直接用月球的直角坐标作为基本变量，但采用均匀旋轉坐标系統，仍以时間作为自变量，解出結果为月球坐标。用这种方法的主要是亚当斯和赫耳等人。

由于月球质量很大，离地球很近，受到太阳和地球的攝动影响較大，要得到它的准确的运动理論非常困难。因此，以前研究月球

运动的人虽然很多，但是結果都不好。在19世紀中叶，大家公认韓中的方法最好，就利用他的方法来計算月球的运动表。自从赫耳提出他的方法后，勃朗又根据他自己的方法，进一步造出了新的月球运动表；結果比韓中的更好，基本上能符合观測要求，于是自1923年开始，天文年历中就采用勃朗的月球运动表。

近来由于宇宙航行技术的飞速发展，月球火箭已經发射成功，对于作为宇宙航行第一个目标的月球，必須掌握它的准确运动規律。在这一章里，对古典方法將不再讲述，而主要介紹現在所采用的方法，即赫耳-勃朗方法，关于其它各种方法，可参考有关书籍[1][2]。

§1 运动方程

考虑月球相对于地球运动，主要摄动来源于太阳的吸引，可近似地把太阳看成相对于地球和月球质量中心C作椭圓运动。如取地球质量中心为坐标原点；ξ-η平面平行于黄道面（即太阳繞地球和月球质量中心的运动平面），則运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\xi}=\frac{\partial u}{\partial \xi},\ \ddot{\eta}=\frac{\partial u}{\partial \eta},\ \ddot{\zeta}=\frac{\partial u}{\partial \zeta},\\ \text{其中}\qquad &u=\frac{\mu}{r}+R,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

μ为$G(E+M)$，E，M即为地球、月球的质量；R为由太阳产生的摄动函数。由于把太阳看作在黄道面上作椭圓运动，在图中取ET平行且等于CS，在$t=0$时，取$O\xi$軸为ET。現在采用旋轉坐标系$OXYZ$；OX始終向着太阳的平均位置，X-Y平面与ξ-η平面重合。也就是說，OX（及OY軸）在不断旋轉，角速度等于太阳的平均运动n_1。对任一时刻t，ξOX角应等于太阳的平黄經

[1] Tisserand 著：Traité de Mécanique Céleste, Tom. III.

[2] Brown 著：Introductory Treatise on Lunar Theory，有中譯本，由卢鼎貫譯，名为"月理初編"，商务印书館出版。

$l=n_1t+\varepsilon_1$，則新坐标(x, y, z)与旧坐标之間的关系应为

$$\xi=x\cos l-y\sin l,\ \eta=x\sin l+y\cos l,\ \zeta=z. \tag{2}$$

由此得

$$\dot{\xi}=\dot{x}\cos l-\dot{y}\sin l-n_1\eta,\ \dot{\eta}=\dot{x}\sin l+\dot{y}\cos l+n_1\xi,\ \dot{\zeta}=\dot{z}.$$

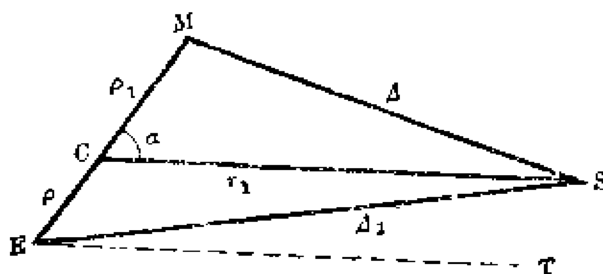


图 24

故月球运动的动能应为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2).$$

因后面方程中不出現质量因子，故

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{n_1^2}{2}(x^2+y^2)-n_1(\dot{x}y-\dot{y}x).$$

于是利用拉格朗日方程（解析力学中的）可得运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2n_1\dot{y}-n_1^2x&=-\frac{\mu x}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial x},\\ \ddot{y}+2n_1\dot{x}-n_1^2y&=-\frac{\mu y}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial y},\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu z}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这里的 R 仍与(1)式中相同，只是要表为 x, y, z, 的函数。設(x', y', z')为太阳的坐标，太阳质量記为 S，則攝动函数应記为

$$\left.\begin{aligned}R&=GS\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{\Delta_1^3}\right),\\ \Delta^2&=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,\\ \Delta_1^2&=x'^2+y'^2+z'^2.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

但 S 看作相对于 E, M 的质量中心 C 作椭圓运动，故若以 C 为坐

标原点，则可以按椭圆运动求出太阳 S 在任何时刻的坐标。設 (x_1, y_1, z_1) 为 S（以 C 为原点）的坐标（坐标轴仍与原来的平行），则由于 C 为 E、M 的质量中心，应有关系

$$x_1 = x' - \frac{M}{E+M}x, \quad y_1 = y' - \frac{M}{E+M}y, \quad z_1 = z' - \frac{M}{E+M}z. \tag{5}$$

代入(4)式，把其中 (x', y', z') 换为 (x_1, y_1, z_1)，则

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 &= \left(x_1 - \frac{E}{E+M}x\right)^2 + \left(y_1 - \frac{E}{E+M}y\right)^2 + \left(z_1 - \frac{E}{E+M}z\right)^2, \\ \Delta_1^2 &= \left(x_1 + \frac{M}{E+M}x\right)^2 + \left(y_1 + \frac{M}{E+M}y\right)^2 + \left(z_1 + \frac{M}{E+M}z\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

原来的

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= GS\left(\frac{x'-x}{\Delta^3} - \frac{x'}{\Delta_1^3}\right) = GS\left(\frac{x_1 - \frac{E}{E+M}x}{\Delta^3} - \frac{x_1 + \frac{M}{E+M}x}{\Delta_1^3}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}GS\left[\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{E+M}{E} + \frac{1}{\Delta_1}\cdot\frac{E+M}{M}\right], \end{aligned}$$

同理
$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}GS\left[\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{E+M}{E} + \frac{1}{\Delta_1}\cdot\frac{E+M}{M}\right],$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}GS\left[\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{E+M}{E} + \frac{1}{\Delta_1}\cdot\frac{E+M}{M}\right].$$

因此相应的摄动函数可取为

$$\begin{aligned} R &= GS\left[\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{E+M}{E} + \frac{1}{\Delta_1}\cdot\frac{E+M}{M}\right] \\ &= \frac{GS(E+M)}{EM}\left(\frac{M}{\Delta} + \frac{E}{\Delta_1}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

这里的 Δ, Δ_1 应用(6)式表示。

§2 摄动函数的初步展开

上节得到运动方程，如要解出，必須展开摄动函数。这里只作初步展开，以便后面应用。从图 25 得

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2&=r_1^2-2\rho_1 r_1\cos\alpha+\rho_1^2,\\ \Delta_1^2&=r_1^2-2\rho r_1\cos\alpha+\rho^2.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由于 C 为 E, M 的质量中心,因此有

$$\rho=\frac{Mr}{E+M},\quad \rho_1=\frac{Er}{E+M}. \tag{2}$$

但摄动函数中出现的为 Δ^{-1} 和 Δ_1^{-1}, 由(1)式得

$$\Delta^{-1}=\frac{1}{r_1}\left[1-2\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

因 ρ_1 与 r 同数量級, r_1 为地球与太阳的平均距离, 则 $\frac{\rho_1}{r_1}$ 約为 $\frac{1}{400}$, 是很小的量,故可以把 Δ^{-1} 展开为 $\frac{\rho_1}{r_1}$ 的冪級数。为簡单起見,令 $c=\cos\alpha$, 则展开式系数应为 c 的函数,記为

$$r_1\Delta^{-1}=1+\sum_{i=1}^{\infty}P_i(c)\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^i. \tag{4}$$

容易証明, $P_i(c)$ 就是 c 的勒让德尔多項式。

証　設 $\frac{\rho_1}{r_1}=\beta$, 令 $F=1-2\beta c+\beta^2$,

则
$$F^{-\frac{1}{2}}=(1-2\beta c+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{i=0}^{\infty}P_i(c)\beta^i. \tag{5}$$

以(5)式对 c 取微商得

$$\beta(1-2\beta c+\beta^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d[P_i(c)]}{dc}\beta^i, \tag{5'}$$

即

$$\frac{1}{\beta}F^{\frac{5}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{dP_i(c)}{dc}\beta^i=1-2\beta c+\beta^2. \tag{6}$$

以(5')式再对 c 取一次微商得

$$3\beta^2(1-2\beta c+\beta^2)^{-\frac{5}{2}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d^2P_i(c)}{dc^2}\beta^i,$$

即

$$\frac{1}{\beta}F^{\frac{5}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d^2P_i(c)}{dc^2}\beta^i=3\beta. \tag{7}$$

若以(5)式对β取微商后再乘上β得

$$\beta(c-\beta)(1-2\beta c+\beta^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{i=0}^{\infty} iP_i(c)\beta^i, \qquad (5'')$$

即

$$\frac{1}{\beta}F^{\frac{3}{2}}\sum iP_i(c)\beta^i=(c-\beta)(1-2\beta c+\beta^2). \qquad (8)$$

以(5'')对β求微商后再乘以β得

$$\beta(c-2\beta)(1-2\beta c+\beta^2)^{-\frac{3}{2}}+3\beta^2(c-\beta)^2(1-2\beta c+\beta^2)^{-\frac{5}{2}}$$
$$=\sum iP_i(c)\beta^i,$$

即 $$\frac{1}{\beta}F^{\frac{5}{2}}\sum i^2P_i(c)\beta^i=(c-2\beta)(1-2\beta c+\beta^2)+3\beta(c-\beta)^2$$
$$=(c+\beta)(1-2\beta c+\beta^2)-3\beta(1-c^2)$$
$$=-(c-\beta)(1-2\beta c+\beta^2)+2c(1-2\beta c+\beta^2)-3\beta(1-c^2).$$

以(6)，(7)，(8)式代替上式右端中的$(1-2\beta c+\beta^2)$，3β以及$(c-\beta)(1-2\beta c+\beta^2)$，則得

$$\frac{1}{\beta}F^{\frac{5}{2}}\sum i^2P_i(c)\beta^i$$
$$=\frac{1}{\beta}F^{\frac{5}{2}}\sum\left[-iP_i(c)+2c\frac{dP_i(c)}{dc}-(1-c^2)\frac{d^2P_i(c)}{dc^2}\right]\beta^i.$$

比較两端β^i的系数即得

$$i^2P_i(c)=-iP_i(c)+2c\frac{dP_i(c)}{dc}-(1-c^2)\frac{d^2P_i(c)}{dc^2},$$

即

$$(1-c^2)\frac{d^2P_i(c)}{dc^2}-2c\frac{dP_i(c)}{dc}+i(i+1)P_i(c)=0. \qquad (9)$$

这就是勒让德尔函数的微分方程，因此$P_i(c)$为c的勒让德尔多項式，即

$$P_i(c)=\frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dc^i}(c^2-1)^i. \qquad (10)$$

前面几个为

$$\left.\begin{array}{l} P_0(c)=1,\ P_1(c)=c,\ P_2(c)=\frac{3}{2}c^2-\frac{1}{2}, \\ P_3(c)=\frac{5}{2}c^3-\frac{3}{2}c,\ P_4(c)=\frac{35}{8}c^4-\frac{15}{4}c^2+\frac{3}{8}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

同样可得

$$\begin{aligned} r_1\Delta_1^{-1} &= \left[1+2\left(\frac{\rho}{r_1}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\rho}{r_1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i P_i(c)\left(\frac{\rho}{r_1}\right)^i. \end{aligned} \tag{12}$$

于是 $$\begin{aligned} R &= \frac{GS(E+M)}{EM}\left(\frac{E}{\Delta_1}+\frac{M}{\Delta}\right) \\ &= \frac{GS(E+M)}{EM}\left[\frac{E}{r_1}+\frac{M}{r_1}+\frac{P_1(c)}{r_1^2}(M\rho_1-E\rho)\right. \\ &\quad +\frac{P_2(c)}{r_1^3}(M\rho_1^2+E\rho^2)+\frac{P_3(c)}{r_1^4}(M\rho_1^3-E\rho^3) \\ &\quad \left.+\frac{P_4(c)}{r_1^5}(M\rho_1^4+E\rho^4)+\cdots\right]. \end{aligned}$$

但由(2)式知 ρ_1, ρ 可换成 r，即得

$$\begin{aligned} R &= \frac{GS(E+M)^2}{EMr_1}+GS\left[\frac{r^2}{r_1^3}P_2(c)+\frac{E-M}{E+M}\frac{r^3}{r_1^4}P_3(c)\right. \\ &\quad \left.+\frac{E^2-EM+M^2}{(E+M)^2}\frac{r^4}{r_1^5}P_4(c)+\cdots\right]. \end{aligned}$$

在第一项中只有 r_1，即只含 (x_1, y_1, z_1)，而 R 在运动方程中都要对 (x, y, z) 求偏微商，因此第一项可以略去。

即 $$\begin{aligned} R &= GS\left[\frac{r^2}{r_1^3}P_2(c)+\frac{E-M}{E+M}\frac{r^3}{r_1^4}P_2(c)\right. \\ &\quad \left.+\frac{E^2-EM+M^2}{(E+M)^2}\frac{r^4}{r_1^5}P_4(c)+\cdots\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

又因太阳繞 EM 质量中心作椭圆运动，設 a_1 为此椭圆的半長徑，則有

$$G(S+E+M)=n_1^2a_1^3.$$

但 $E+M$ 与 S 比較相差太远，如 $S=1$，則 $E+M$ 約只有 3×10^{-6}，故近似地可写为

$$GS=n_1^2a_1^3.$$

代入(13)式得

$$R=n_1^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[P_2(c)+\frac{E-M}{E+M}\left(\frac{r}{r_1}\right)P_3(c)\right.$$
$$\left.+\frac{E^2-EM+M^2}{(E+M)^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2P_4(c)+\cdots\right].$$

若把括弧内第三項系数中 E^2-EM+M^2 換成 $(E-M)^2$，則誤差为 $\frac{EM}{(E+M)^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2$，約为 8×10^{-8}，可以略去，于是摄动函数可写为

$$R=n_1^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[P_2(c)+\frac{E-M}{E+M}\left(\frac{r}{r_1}\right)P_3(c)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{E-M}{E+M}\right)^2\left(\frac{r}{r_1}\right)^2P_4(c)+\cdots\right].\tag{14}$$

根据定义，(x_1, y_1, z_1) 为 S 对于 E，M 质量中心 C 的坐标，而 x-y 平面又是黄道面，故 $z_1=0$。于是有

$$rr_1\cos\alpha=xx_1+yy_1,\tag{15}$$

則

$$r^2P_2(c)=r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{(xx_1+yy_1)^2}{r_1^2}-\frac{1}{2}r^2$$
$$=\frac{1}{2}(2x^2-y^2-z^2)+\frac{3}{2}x^2\left[\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2-1\right]$$
$$+\frac{3}{2}y^2\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2+\frac{3xyx_1y_1}{r_1^2}.\tag{16}$$

如果太阳运动为圓形軌道，即令偏心率 $e_1=0$，則 $x_1=r_1=a_1, y_1=0$，故后面三項应等于 0。把(14)式第一项改写为

$$n_1^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3P_2(c)=n_1^2r^2P_2(c)+n_1^2r^2P_2(c)\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3-1\right].$$

令
$$R=\frac{1}{2}n_1^2(2x^2-y^2-z^2)+\Omega,$$
则有
$$\Omega=n_1^2\left[r^2P_2(c)\left\{\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3-1\right\}+\frac{3x^2}{2}\left\{\left(\frac{x_1}{r_1}\right)^2-1\right\}+\frac{3}{2}y^2\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{3xyx_1y_1}{r_1^2}+\frac{r^3}{a_1}\frac{E-M}{E+M}\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^4P_3(c)+\cdots\right]. \tag{17}$$
这样就把 R 中的主要项分列出来。另外在 Ω 中前四项是 (x, y, z) 的二次齐次函数，$r^3P_3(c)$ 应为它們的三次齐次函数，以后的項为更高次齐次函数，为了便于利用齐次函数的性质，令
$$\Omega=\Omega_2+\Omega_3+\cdots, \tag{18}$$
其中 Ω_p 表示 (x, y, z) 的 p 次齐次函数。

以(17)式代入(6-1-3)式得
$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}-2n_1\dot{y}-3n_1^2x=-\frac{\mu x}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\&\ddot{y}+2n_1\dot{x}=-\frac{\mu y}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial y},\\&\ddot{z}+n_1^2z=-\frac{\mu z}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

§3 用复变量表示的运动方程

为了便于方程的討論，赫耳引入了一种新变量，定义为
$$u=x+\sqrt{-1}\,y,\quad v=x-\sqrt{-1}\,y. \tag{1}$$
故
$$r^2=uv+z^2.$$
可以把 Ω 中的 x, y 换成 u, v，則有
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial x}&=\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{\partial\Omega}{\partial v},\\\frac{\partial\Omega}{\partial y}&=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)\sqrt{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$
代入运动方程(6-2-19)式的前两式，得

$$\ddot{x}-2n_1\dot{y}-3n_1^2x=-\mu\frac{x}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{\partial\Omega}{\partial v},$$

$$\ddot{y}+2n_1\dot{x}=-\mu\frac{y}{r^3}+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)\sqrt{-1}.$$

以 $\sqrt{-1}$ 乘第二式，与第一式相加及相减得下列两式：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{u}+2\sqrt{-1}\,n_1\dot{u}-\frac{3}{2}n_1^2(u+v)&=-\mu\frac{u}{r^3}+2\frac{\partial\Omega}{\partial v},\\ \ddot{v}-2\sqrt{-1}\,n_1\dot{v}-\frac{3}{2}n_1^2(u+v)&=-\mu\frac{v}{r^3}+2\frac{\partial\Omega}{\partial u}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

再令

$$\xi=(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1,\quad \zeta=e^{\sqrt{-1}\xi},\tag{4}$$

其中 n 为月球繞地球运动的平均角速度，再定义运算子

$$D=\zeta\frac{d}{d\zeta},\tag{5}$$

则 $\dot{u}=(n-n_1)\frac{du}{d\xi}=\sqrt{-1}(n-n_1)\zeta\frac{du}{d\zeta}=\sqrt{-1}(n-n_1)Du,$

$$\ddot{u}=-(n-n_1)^2D^2u.$$

再令

$$m=\frac{n_1}{n-n_1},\quad k=\frac{\mu}{(n-n_1)^2},\quad w=\frac{2\Omega}{(n-n_1)^2},\tag{6}$$

则运动方程变为

$$D^2u+2mDu+\frac{3}{2}m^2(u+v)-k\frac{u}{r^3}=-\frac{\partial w}{\partial v},\tag{7}$$

$$D^2v-2mDv+\frac{3}{2}m^2(u+v)-k\frac{v}{r^3}=-\frac{\partial w}{\partial u},\tag{8}$$

$$D^2z-m^2z-k\frac{z}{r^3}=-\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial z}.\tag{9}$$

这就是赫耳用新变量 $u,\ v,\ z,\ \zeta$ 所得的运动方程。下面再作一些轉化。

以 v 乘(7)式，以 u 乘(8)式，相减得

$$uD^2v-vD^2u-2m(uDv+vDu)+\frac{3}{2}m^2(u^2-v^2)=v\frac{\partial w}{\partial v}-u\frac{\partial w}{\partial u}.$$

但
$$D(uDv)=uD^2v+DuDv,$$
$$D(vDu)=vD^2u+DvDu,$$

代入上式得

$$D(uDv-vDu-2muv)+\frac{3}{2}m^2(u^2-v^2)=v\frac{\partial w}{\partial v}-u\frac{\partial w}{\partial u}. \quad (10)$$

再以 v 乘(7)，以 u 乘(8)，$2z$ 乘(9)，一并相加，右端成为

$$-\left(u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}+z\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

由于原来 $\Omega=\sum\Omega_p$，Ω_p 为 x, y, z 的 p 次齐次式，故 w 也可表为 $\sum w_p$，w_p 也为 u, v, z 的 p 次齐次式，根据齐次式的欧拉公式知

$$u\frac{\partial w_p}{\partial u}+v\frac{\partial w_p}{\partial v}+z\frac{\partial w_p}{\partial z}=pw_p,$$

于是结果成为

$$vD^2u+uD^2v+2zD^2z+2m(vDu+uDv)$$
$$+\frac{3}{2}m^2(u+v)^2-2m^2z^2-\frac{2k}{r}=-\sum pw_p. \quad (11)$$

再以 Dv 乘(7)，Du 乘(8)，$2Dz$ 乘(9)后一并相加得

$$DvD^2u+DuD^2v+\frac{3}{2}m^2(u+v)(Du+Dv)+2DzD^2z-2m^2zDz$$
$$-\frac{k}{r^3}(uDv+vDu+2zDz)=-\left(\frac{\partial w}{\partial u}Du+\frac{\partial w}{\partial v}Dv+\frac{\partial w}{\partial z}Dz\right), \quad (12)$$

其中含 k 的項可化为

$$-\frac{k}{r^3}D(uv+z^2)=-\frac{k}{r^3}D(r^2)=2kD\left(\frac{1}{r}\right).$$

其次，由于 w 为 u, v, z, ζ（因太阳坐标中包含 t，故也认为包含 ζ）的函数，则

$$Dw=\frac{\partial w}{\partial u}Du+\frac{\partial w}{\partial v}Dv+\frac{\partial w}{\partial z}Dz+\frac{\partial w}{\partial \zeta}D\zeta.$$

最后一项只对太阳坐标进行运算。由于

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} D\zeta = \zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta} = D_t w \equiv D(D^{-1} D_t w),$$

这里用 $D_t w$ 表示只对太阳坐标运算，D^{-1} 为 D 的逆运算子。利用这些結果，則(12)式可以积分为

$$DuDv + (Dz)^2 + \frac{3}{4} m(u+v)^2 - m^2 z^2 + \frac{2k}{r} = C - w + D^{-1}(D_t w),$$

其中 C 为积分常数。与(11)式相加得

$$D^2(uv+z^2) - DuDv - (Dz)^2 + 2m(vDu + uDv)$$

$$+ \frac{9}{4} m^2 (u+v)^2 - 3m^2 z^2 = c - \sum (p+1) w_p + D^{-1}(D_t w). \quad (13)$$

方程式(9)，(10)，(13)为赫耳的新形式的运动方程。注意在(10)，(13)式中，k 已不出現，而出現一个新的常数 C，这在后面再說明。

§4 中間軌道

在行星运动理論中，常用椭圓軌道来作为第一近似，称为中間軌道。而在月球运动理論中，由于月球軌道变化很快，如仍用椭圓軌道作第一次近似，那就太粗糙了。在各种研究方法中，都以只考慮太阳摄动的主要项所得到的解，作为中間軌道。在赫耳方法中，是略去太阳軌道偏心率、太阳視差以及月球軌道傾角。具体地說，就是在运动方程中，令 $\Omega = z = 0$。他把所得的解作为中間軌道，从中間軌道的討論，已可以得到一些定性結果。

如在§2末的运动方程中，令 $\Omega = z = 0$，再把自变量换成 $\xi = (n - n_1)t$，则运动方程成为

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} - 2m\frac{dy}{d\xi} - 3m^2 x = -\frac{kx}{r^3}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2m\frac{dx}{d\xi} = -\frac{ky}{r^3}, \quad (2)$$

其中 $$m=\frac{n_1}{n-n_1},\quad k=\frac{\mu}{(n-n_1)^2}.$$

在方程中，由于 $m=0.081$，可以看作小量。略去 m^2，則方程組(1)，(2)显然有一个特解

$$x=a\cos\xi,\quad y=a\sin\xi,\tag{3}$$

其中 a 应滿足关系

$$1+2m=\frac{k}{a^2}.\tag{4}$$

若再准确一些，取解为

$$x=a(1+p)\cos\xi,\quad y=a(1+q)\sin\xi,$$

則 p，q 至少与 m 同数量級，也为小量，可略去它們的二次項。則

$$r^3=a^2[1+p+q+(p-q)\cos 2\xi].$$

并且 $$\frac{kx}{r^3}=\frac{k}{a^2}(1+p)\cos\xi\left[1-\frac{3}{2}(p+q)-\frac{3}{2}(p-q)\cos 2\xi\right].$$

在右端中要出現 $\cos\xi\cos 2\xi$，可化为 $\cos\xi$ 及 $\cos 3\xi$ 的和。因此在原方程式(1)中也一定要出現 $\cos 3\xi$．同样，(2)式要出現 $\sin 3\xi$，故解的形式应为

$$x=a(\cos\xi+p\cos\xi+r\cos 3\xi),$$
$$y=a(\sin\xi+q\sin\xi+s\sin 3\xi).$$

其中 p，q 至少与 m 同数量級；r，s 至少与 m^2 同数量級。由此逐步近似下去，方程組(1)，(2)的解可以表为級数形式，即

$$\left.\begin{aligned}x&=A_0\cos\xi+A_1\cos 3\xi+A_2\cos 5\xi+\cdots,\\ y&=B_0\sin\xi+B_1\sin 3\xi+B_2\sin 5\xi+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

若把系数改写为

$$A_j=a(a_j+a_{-j-1}),\quad B_j=a(a_j-a_{-j-1}),\tag{6}$$

由于 a 已为一任意常数，故令 $a_0=1$ 不失一般性。以(6)代入(5)式，則

$$x=a\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j\cos(2j+1)\xi,\quad y=a\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j\sin(2j+1)\xi.$$

因此相应地有

$$u = a\sum_{-\infty}^{+\infty} a_j \zeta^{2j+1}, \quad v = a\sum_{-\infty}^{+\infty} a_j \zeta^{-2j-1}. \tag{7}$$

这里的 u, v 表达式应为 (6-3-7), (6-3-8) 式的特解，只是要在其中令 $w=z=0$，即方程

$$D^2u + 2mDu + \frac{3}{2}m^2(u+v) - k\frac{u}{r^3} = 0, \tag{8}$$

$$D^2v - 2mDv + \frac{3}{2}m^2(u+v) - k\frac{v}{r^3} = 0 \tag{9}$$

的解。其中 k 可利用(4)式换为 a。

同样，与(6-3-10), (6-3-13)式相对应，(8), (9) 方程式可轉化为

$$D(uDv - vDu - 2muv) + \frac{3}{2}(u^2 - v^2) = 0, \tag{10}$$

$$D^2(uv) - DuDv + 2m(vDu + uDv) + \frac{9}{4}m^2(u+v)^2 = C. \tag{11}$$

我們下面就用这些式子来求出系数 a_j。

§5 系数 a_j 的表达式

現在先利用(6-4-10), (6-4-11)式，其中要对 u, v 进行运算；如 Du, Dv, u^2, v^2, uv 等。但按(6-4-7)式，u, v 都表为 ζ 的冪級数。經过这些运算，結果仍应为冪級数，故以(6-4-7)式代入(6-4-10), (6-4-11)式得

$$\sum_i\sum_j\left[a_i a_{i-j}\{4j(2i-j+1)+4jm\} - \frac{3}{2}m^2 a_i(a_{j-i-1} - a_{-j-i-1})\right]\zeta^{2j} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_i\sum_j\left[a_i a_{i-j}\left\{4j^2 - (2i+1)(2j-2i-1) + 4m(2i-j+1) + \frac{9}{2}m^2\right\} + \frac{9}{4}m^2 a_i(a_{j-i-1} + a_{-j-i-1})\right]\zeta^{2j} = C. \tag{2}$$

由于这里的等式与 ζ 无关，故除(2)式中 $j=0$ 的系数应等于 C 外，其余所有 ζ^{2j} 的系数都应等于0。为了便于简化，把(1)式系数都乘3，(2)式系数都乘2，则得

$$\sum_i\left[a_ia_{i-j}\{12j(2i-j+1)+12jm\}-\frac{9}{2}m^2a_i(a_{j-i-1}-a_{-j-i-1})\right]=0, \tag{3}$$

$$\sum_i\left[a_ia_{i-j}\{8j^2-(4i+2)(2j-2i-1)+8m(2i-j+1)+9m^2\}\right.$$
$$\left.+\frac{9}{2}m^2a_i(a_{j-i-1}+a_{-j-i-1})\right]=0. \tag{4}$$

以(4)式减(3)式及(4)式加(3)式得

$$\sum_i a_i a_{i-j}A_{ij}+9m^2\sum_i a_i a_{j-i-1}=0, \tag{5}$$

$$\sum_i a_i a_{i-j}B_{ij}+9m^2\sum_i a_i a_{-j-i-1}=0, \tag{6}$$

其中

$$A_{ij}=20j^2-16j(2i+1)+2(2i+1)^2+m(8+16i-20j)+9m^2, \tag{7}$$

$$B_{ij}=-4j^2+8j(2i+1)+2(2i+1)^2+m(8+16i+4j)+9m^2. \tag{8}$$

在这里 $j\neq0$，当对 i 求和时，若用 $\sum'$ 表示除掉 $i=0$ 的项，则(5)，(6)式成为

$$a_0a_{-j}A_{0j}+\sum_i{}'a_ia_{i-j}A_{ij}+9m^2\sum_i a_ia_{j-i-1}=0, \tag{9}$$

$$a_0a_{-j}B_{0j}+\sum_i{}'a_ia_{i-j}B_{ij}+9m^2\sum_i a_ia_{-j-i-1}=0. \tag{10}$$

在(9)，(10)两式中消去第一项，可得

$$\sum_i{}'a_ia_{i-j}C_{ij}+9m^2\sum_i a_iD_{ij}=0, \tag{11}$$

其中 C_{ij}，D_{ij} 为

$$C_{ij}=B_{0j}A_{ij}-A_{0j}B_{ij}$$
$$=-48ij[4j^2+4j-2+4i(j-1)+4m(j-i-1)+m^2], \tag{12}$$

$$D_{ij}=B_{0j}a_{j-i-1}-A_{0j}a_{-j-i-1}. \tag{13}$$

若再用 $\sum''$ 表示对 i 求和中除去 $i=0$ 及 $i=j$ 的项，需要在 $\sum'$ 中

把 $i=j$ 的项分出，故(11)式为

$$a_0 a_j C_{jj} + \sum_i'' a_i a_{i-j} C_{ij} + 9m^2 \sum_i a_i D_{ij} = 0. \tag{14}$$

再引入記号

$$[j, i] = -\frac{C_{ij}}{C_{jj}}, \quad [j] = -\frac{9B_{0j}}{C_{jj}}, \quad (j) = -\frac{9A_{0j}}{C_{jj}}, \tag{15}$$

則因 $a_0=1$，故(14)式成为

$$a_j = \sum_i'' [j, i] a_i a_{i-j} + m^2 [j] \sum_i a_i a_{j-i-1}. \tag{16}$$

这就是求 a_j 的循环公式。至于(15)式定义的三个符号，可利用 C_{ij} 与 A_{ij}, B_{ij} 之間的关系，得到

$$\left.\begin{aligned} [j, i] &= -\frac{i[4j^2+4j-2+4i(j-1)+4m(j-i-1)+m^2]}{j(8j^2-2-4m+m^2)}, \\ [j] &= \frac{3(-4j^2+8j+4mj+2+8m+9m^2)}{16j^2(8j^2-2-4m+m^2)}, \\ (j) &= \frac{3(20j^2-16j-20mj+2+8m+9m^2)}{16j^2(8j^2-2-4m+m^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

由于 $j\neq 0$，故上面三个量都不会成为无穷大，而且都可以展开为 m 的級数，展开式中第一項不含 m。至于 $j=0$ 的項，可在(2)式中令 $j=0$ 再求，可以求出积分常数 C 为 m 的函数。

下面逐步来求出 a_j 的表达式，首先来估計 a_j 的数量級。前面已說明，j 的絕对値愈大，則对 m 的数量級愈高（即 m 的最低次冪愈大)。在(16)式中，令 $j=1$ 得

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum'' [1, i] a_i a_{i-1} + m^2 [1] \sum a_i a_{-i} + m^2 (1) \sum a_i a_{-i-2} \\ &= [1, 2] a_1 a_2 + [1, 3] a_2 a_3 + \cdots \\ &\quad + [1, -1] a_{-1} a_{-2} + [1, -2] a_{-2} a_{-3} + \cdots \\ &\quad + m^2 [1] (a_0^2 + 2a_1 a_{-1} + 2a_2 a_{-2} + \cdots) \\ &\quad + m^2 (1) (a_0 a_{-2} + a_1 a_{-3} + \cdots). \end{aligned} \tag{18}$$

在(18)式中容易看出，右端中 m 的冪次最低項应为 $m^2[1]a_0^2$，但

$a_0=1$, [1] 对 m 的展开式中第一項不含 m；因此 a_1 应与 m^2 同数量級。用同样方法可討論出 a_{-1} 也与 m^2 同数量級。

如在(16)式中令 $j=2$，則有

$$
\begin{aligned}
a_2=&[2, 1]a_1a_{-1}+[2, 3]a_0a_1+\cdots\\
&+[2, -1]a_{-1}a_{-3}+[2, -2]a_{-2}a_{-4}+\cdots\\
&+m^2[2](2a_0a_1+a_2a_{-1}+a_{-1}a_{-2}+\cdots)\\
&+m^2(2)(a_0a_{-3}+a_1a_{-4}+\cdots).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

在(19)式中可看出含 m 的最低冪項应为

$$[2, 1]a_1a_{-1}+2m^2[2]a_1.$$

由于 a_1, a_{-1} 都是与 m^2 同数量級，則 a_2 应与 m^4 同数量級。同样可得 a_{-2} 也与 m^4 同数量級。

用同样方法可以得到 a_j 应与 $m^{2|j|}$ 同数量級。利用这点，就可以根据所要求的精确度来求出所有的 a_j. 例如，若只要准到 m^5，則在 a_1 中只要取

$$a_1=m^2[1]a_0^2=m^2[1].$$

因其余各項都至少是 m^6，利用(17)式知

$$[1]=\frac{3}{16}\cdot\frac{6+12m+9m^2}{6-4m+m^2},$$

因此

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1&=\frac{3}{16}m^2+\frac{1}{2}m^3+\frac{7}{12}m^4+\frac{11}{36}m^5;\\
\text{同样}\quad a_{-1}&=-\frac{19}{16}m^2-\frac{5}{3}m^3-\frac{43}{36}m^4-\frac{14}{27}m^5.
\end{aligned}
\right\}
\tag{20}
$$

代入 a_2, a_{-2} 的表达式中可求出 a_2, a_{-2}. 如要准到 m^7，則 a_1 应取为

$$a_1=[1, 2]a_1a_2+[1, -1]a_{-1}a_{-2}+m^2[1](1+2a_1a_{-1})+m^2(1)a_{-2}.$$

在右端各式中，a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2} 都只要取最低項就够了，可用上面只准到 m^5 的結果。

用这样的方法，可以把所有的 a_i 逐步求到任意高的精确度，如准到 m^7，則有

$$a_1=\frac{3}{16}m^2+\frac{1}{2}m^3+\frac{7}{12}m^4+\frac{11}{36}m^5-\frac{30749}{2^{12}3^5}m^6,$$

$$a_{-1}=-\frac{19}{16}m^2-\frac{5}{3}m^3-\frac{43}{36}m^4-\frac{14}{27}m^5-\frac{7381}{2^{10}3^4}m^6,$$

$$a_2=\frac{25}{256}m^4+\frac{803}{1920}m^5+\frac{6109}{7200}m^6,$$

$$a_{-2}=\frac{833}{3\times 2^{12}}m^6,$$

$$a_{-3}=\frac{1}{192}m^6.$$

在赫耳的文章中，求出了准到 m^9 的式子，計算到15位小数。

虽然 a_j 已求出，但在 u, v 展式中还有一个因子 a。利用(6-4-8)式，由于 $z=0$，故 $r^2=uv$，于是得

$$\left(D^2+2mD+\frac{3}{2}m^2\right)u+\frac{3}{2}m^2v=\frac{ku}{r^3}=ku^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

以 u，v 的級数代入得

$$\sum_i\left[(2i+1)^2+2m(2i+1)+\frac{3}{2}m^2\right]a_i\zeta^{2i+1}+\frac{3}{2}m^2\sum_i a_i\zeta^{-2i-1}$$
$$=\frac{k}{a^3}\left[\left\{\sum_i a_i\zeta^{2i+1}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\sum_i a_i\zeta^{-2i-1}\right\}^{-\frac{3}{2}}\right].$$

此式应为 ζ 的恒等式，在 $\zeta=1$ 时也应該成立。于是有

$$\frac{k}{a^3}=\{\sum a_i\}^2\left[\sum\left\{(2i+1)^2+2m(2i+1)+\frac{3}{2}m^2\right\}a_i\right]. \qquad (21)$$

定义 a 为

則
$$\left.\begin{aligned}\mu&=n^2\bar{a}^3,\\ k&=(1+m)^2\bar{a}^3.\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

故(21)式成为

$$\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^3 = (1+m)^{-2}\{\sum a_i\}^{-2}[\sum\{(2i+1)^2+2m(2i+1)+3m^2\}a_i]. \tag{23}$$

右端的 a_i 可表为 m 的級数，因此可以把 $\frac{a}{\bar{a}}$ 展为 m 的級数。若只准到 m^3，则

$$a=\bar{a}\left(1-\frac{1}{6}m^2+\frac{1}{3}m^3\right).$$

到此为止，已把 u, v 展为 ζ 的級数，系数都是 m 的級数。

§6 中間軌道对于橢圓軌道的几种主要差别

若沒有攝动存在，月球軌道应为橢圓。以上所述只考虑太阳攝动的主要項，所得到的为中間軌道。利用中間軌道，已可以得到一些近似于实际情况的主要結果，下面分别說明。

1. 二均差　考虑太阳的攝动主要項以后，在月球真黄經及向徑表达式中就出現一种周期項，周期为朔望月的一半，称为二均差。

設 v, r 表示月球在任何时刻的真黄經和向徑，太阳的平黄經記为 $n_1t+\varepsilon_1$. 由于在中間軌道的情形下，$z=0$，月球与太阳在同一平面内。由于 x 軸正好向着太阳的平均位置，故月球方向与 x 軸交角应为 $v-n_1t-\varepsilon_1$，而且

$$x=r\cos(v-n_1t-\varepsilon_1),\quad y=r\sin(v-n_1t-\varepsilon_1).$$

则
$$\begin{aligned}r\cos(v-nt-\varepsilon)&=r\cos[v-n_1t-\varepsilon_1-(n-n_1)t-(\varepsilon-\varepsilon_1)]\\&=r\cos(v-n_1t-\varepsilon_1-\xi)=x\cos\xi+y\sin\xi\\&=\frac{1}{2}(u\zeta^{-1}+v\zeta).\end{aligned} \tag{1}$$

同样
$$r\sin(v-nt-\varepsilon)=-\frac{1}{2}\sqrt{-1}(u\zeta^{-1}-v\zeta). \tag{2}$$

以(1)，(2)两式相除得

$$\sqrt{-1}\operatorname{tg}(v-nt-\varepsilon)=\frac{u\zeta^{-1}-v\zeta}{u\zeta^{-1}+v\zeta}.$$

于是有
$$\frac{1+\sqrt{-1}\operatorname{tg}(v-nt-\varepsilon)}{1-\sqrt{-1}\operatorname{tg}(v-nt-\varepsilon)}=e^{2\sqrt{-1}(v-n_1t-\varepsilon_1)}=\frac{u\zeta^{-1}}{v\zeta}$$
$$=\frac{\sum a_j\zeta^{2j}}{\sum a_j\zeta^{-2j}}=\frac{\sum a_j\zeta^{2j}}{\sum a_j\zeta_1^{2j}}.$$

其中設 $\zeta^{-1}=\zeta_1$，取自然对数得

$$2\sqrt{-1}(v-nt-\varepsilon)=\ln(\sum a_j\zeta^{2j})-\ln(\sum a_j\zeta_1^{2j}). \tag{3}$$

但
$$\sum a_j\zeta^{2j}=1+(a_1\zeta^2+a_{-1}\zeta^{-2})+(a_2\zeta^4+a_{-2}\zeta^{-4})+\cdots,$$
$$\sum a_j\zeta^{-2j}=1+(a_1\zeta_1^2+a_{-1}\zeta^{-2})+(a_2\zeta^4+a_{-2}\zeta^{-4})+\cdots,$$

于是有
$$\ln(\sum a_j\zeta^{2j})=-a_1a_{-1}+a_1\zeta^2+a_{-1}\zeta^{-2}$$
$$+\left(a_2-\frac{1}{2}a_1^2\right)\zeta^4+\left(a_{-2}-\frac{1}{2}a_{-1}^2\right)\zeta^{-4}+\cdots,$$
$$\ln(\sum a_j\zeta_1^{2j})=-a_1a_{-1}+a_1\zeta_1^2+a_{-1}\zeta_1^{-2}$$
$$+\left(a_2-\frac{1}{2}a_1^2\right)\zeta^4+\left(a_{-2}-\frac{1}{2}a_{-1}^2\right)\zeta^{-4}+\cdots.$$

代入(3)式得

$$2\sqrt{-1}(v-nt-\varepsilon)=a_1(\zeta^2-\zeta_1^2)+a_{-1}(\zeta^{-2}-\zeta_1^{-2})$$
$$+\left(a_2-\frac{1}{2}a_1^2\right)(\zeta^4-\zeta_1^4)+\left(a_{-2}-\frac{1}{2}a_{-1}^2\right)(\zeta^{-4}-\zeta_1^{-4})+\cdots.$$

由于 $\zeta_1=\zeta^{-1}$，于是得

$$v-nt-\varepsilon=(a_1-a_{-1})\sin 2\xi+\left(a_2-a_{-2}-\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}a_{-1}^2\right)\sin 4\xi+\cdots,$$

即
$$v=nt+\varepsilon+A_2\sin 2\xi+A_4\sin 4\xi+\cdots, \tag{4}$$

其中 A_{2j} 与 $m^{|2j|}$ 同数量級。如果只准到 m^3，則应有

$$v=nt+\varepsilon+\left(\frac{11}{8}m^2+\frac{13}{6}m^3\right)\sin 2\xi+\cdots. \tag{5}$$

另外，由 $r^2=uv=(\sum a_j\zeta^{2j+1})(\sum a_j\zeta^{-2j-1})a^2$，如只准到 m^3，也可得

$$r=a\left[1-\left(m^2+\frac{7}{6}m^3\right)\cos 2\xi+\cdots\right].\qquad(6)$$

从(5)，(6)两式可以看出，v 和 r 为 2ξ 的三角級数，而

$$\xi=(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1,$$

当 t 增加一个朔望月时，ξ 增加 2π。因此这些項都以半个朔望月为周期，称为二均差。这在第谷的观测中已发現。

2. 出差 在月球黄經表达式中，还有一些項，其数量不小，也是周期函数。下面从中間軌道的运动方程出发，逐步求出。

从(6-4-8)式知

$$\left(D^2+2mD+\frac{3}{2}m^2\right)u+\frac{3}{2}m^2v=\frac{ku}{r^3}.\qquad(7)$$

由于中間軌道是(7)式的一个特解，根据上面的結果为

$$u=a\sum_i a_i\zeta^{2i+1},\quad v=a\sum_i a_i\zeta^{-2i-1}.\qquad(8)$$

現在来求(7)式較准确的一般解。

設 $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ 仍为(7)式的解，这里的 u, v 为(8)式結果。令 $\rho^2=uv$，而 $r^2=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$ 如只准到 Δu, Δv 的一次冪，則有

$$r^2=\rho^2+u\Delta v+v\Delta u.\qquad(9)$$

由于 (u, v)，$(u+\Delta u, v+\Delta v)$ 都是(7)式的解，代入后相减，并利用(9)式則得

$$\left(D^2+2mD+\frac{3}{2}m^2\right)\Delta u+\frac{3}{2}m^2\Delta v$$

$$=\frac{k(u+\Delta u)}{r^3}-\frac{ku}{\rho^3}=-\frac{1}{2}\frac{k}{\rho^3}\left(\Delta u+3\frac{u}{v}\Delta v\right),$$

即

$$\left(D^2+2mD+\frac{3}{2}m^2+\frac{k}{2\rho^3}\right)\Delta u+\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{2}\frac{k}{\rho^3}\frac{u}{v}\right)\Delta v=0.\qquad(10)$$

利用 D 的性质可以把(10)改变形式。

設 x 为任一 ξ 的函数，則

$$Dx = D\zeta(\zeta^{-1}x) = \zeta D(\zeta^{-1}x) + \zeta\cdot\zeta^{-1}x) = \zeta(D+1)(\zeta^{-1}x),$$

$$D^2x = D[\zeta(D+1)(\zeta^{-1}x)] = \zeta(D^2+D)(\zeta^{-1}x) + (D+1)(\zeta^{-1}x)$$
$$= \zeta(D+1)^2(\zeta^{-1}x).$$

利用这些关系，使(10)式成为

$$\left[(D+1+m)^2+\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{k}{\rho^3}\right)\right](\zeta^{-1}\Delta u)+N(\zeta\Delta v)=0, \quad (11)$$

其中

$$N=\frac{3}{2}m^2\zeta^{-2}+\frac{3}{2}\frac{k}{\rho^3}\cdot\frac{u\zeta^{-1}}{v\zeta}. \quad (12)$$

下面先展开 $\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{k}{\rho^3}\right)$ 及 N 为 ζ 的級数。

由(7)式可知[因(8)式的 u, v 为它的解]

$$\frac{k}{\rho^3}=\frac{3}{2}m^2+\frac{(D^2+2mD)u+\frac{3}{2}m^2v}{u},$$

以(8)式代入，则

$$(D^2+2mD)u=2\zeta\sum[(2j+1)^2+2m(2j+1)]a_j\zeta^{2j}$$
$$=(1+2m)u+2\zeta\sum[4j(j+1+m)a_j\zeta^{2j}],$$

因此

$$\frac{k}{\rho^3}+m^2-1+2m+\frac{5}{2}m^2+\frac{\sum[4j(j+1+m)a_j+\frac{3}{2}m^2a_{-j-1}]\zeta^{2j}}{\sum a_r\zeta^{2r}}. \quad (13)$$

最后一項为两个級数相除，設它們的商为 $\sum A_i\zeta^{2i}$，则由于

$$[\sum A_i\zeta^{2i}][\sum a_r\zeta^{2r}]=\sum_i\sum_j a_{j-i}A_i\zeta^{2j},$$

亦即 $\sum\left[4j(j+1+m)a_j+\frac{3}{2}m^2a_{-j-1}\right]\zeta^{2j}=\sum_i\sum_j a_{j-i}A_i\zeta^{2j}.$

比較 ζ 的系数得

$$\sum_i a_{j-i}A_i=4j(j+1+m)a_j+\frac{3}{2}m^2a_{-j-1}, \quad (14)$$

其中 i, j 都代表任意整数. 以 $j=0, 1, -1$ 为例得

$$\left.\begin{aligned}
&a_0A_0+a_{-1}A_1+a_1A_{-1}+\cdots=\frac{3}{2}m^2a_{-1},\\
&a_0A_1+a_1A_0+a_2A_{-1}+\cdots=4(2+m)a_1+\frac{3}{2}m^2a_{-2},\\
&a_0A_{-1}+a_{-1}A_0+a_{-2}A_1+\cdots=-4ma_{-1}+\frac{3}{2}m^2a_0.
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

由于 a_j 与 $m^{|2j|}$ 同数量級，故从(15)式中的后两式可以看出，A_1，A_{-1} 也与 m^2 同数量級，于是由第一式知 A_0 与 m^4 同数量級。同样，若令 $j=2, -2$，則得到另外两个与(15)式相同的关系式，可看出 A_2，A_{-2} 应与 m^4 同数量級，由此类推可得 A_i 与 m^{2i} 同数量級。如只准确到 m^5，則容易解出

$$\left.\begin{aligned}
&A_1=A_{-1}=\frac{3}{2}m^2-4ma_{-1},\\
&A_0=-\frac{3}{2}m^2a_1+4ma_{-1}(a_1+a_{-1}),\\
&A_2=A_{-2}=8(1-m)a_{-2}+\frac{3}{2}m^2(a_1-a_{-1})+4ma_{-1}^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

因为 a_j 在上节已得出，为 m 的已知函数，所以可得展开式

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\rho^3}+m^2&=1+2m+\frac{5}{2}m^2+\sum A_i\zeta^{2i}\\
&=1+2m+\frac{5}{2}m^2+A_0+\sum{}'A_i\zeta^{2i}.
\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $\sum'$ 表示对 i 求和时不要 $i=0$ 的項。由于右端前面几項都不含 ζ，故再用下列記号：

$$\frac{k}{\rho^3}+m^2=2\sum M_i\zeta^{2i}=2M_0+2\sum{}'M_i\zeta^{2i},\tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&2M_0=1+2m+\frac{5}{2}m^2+A_0,\\
&2M_i=A_i.
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

因此 M_i 也与 $m^{|2i|}$ 同数量級。

下面再展开 N。由于

$$N=\frac{3}{2}m^2\zeta^{-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{k}{\rho^3}\cdot\frac{u\zeta^{-1}}{v\zeta}.$$

其中 $\frac{k}{\rho^3}$ 可用(18)式，只是把 $2M_0$ 改成了 $2M_0-m^2$，$u\zeta^{-1}$，$v\zeta$ 可用(2)式的結果，于是

$$N=\frac{3}{2}m^2\zeta^{-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2[\sum M_i\zeta^{2i}][\sum a_r\zeta^{2r}]}{\sum a_{-r}\zeta^{2r}}=\sum N_i\zeta^{2i}. \qquad (20)$$

与刚才求 $\frac{k}{\rho^3}$ 的展开式一样，利用級数除法，比較 ζ 的系数可得 N_i 表为 M_i，a_j 的关系式。如只准到 m^4，则有

$$\left.\begin{aligned}
&N_0=3\left(M_0-\frac{1}{2}m^2\right)[1-(a_1-a_{-1})^2],\\
&N_1=3M_1+3\left(M_0-\frac{1}{2}m^2\right)(a_1-a_{-1}),\\
&N_{-1}=\frac{3}{2}m^2+3M_1-3\left(M_0-\frac{1}{2}m^2\right)(a_1-a_{-1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

故 N_1，N_{-1} 与 m^2 同数量級，而且用逐步近似可得到 N_i 与 $m^{|2i|}$ 同数量級。以(18)，(20)式代入方程(11)得

$$[(D+1+m)^2+\sum M_i\zeta^{2i}](\zeta^{-1}\Delta u)+[\sum N_i\zeta^{2i}](\zeta\Delta u)=0. \quad (22)$$

赫耳把此方程的解取为

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta^{-1}\Delta u=a[e^{-\sqrt{-1}\omega}\sum E_r\zeta^{2r+c}+e^{\sqrt{-1}\omega}\sum F_r\zeta^{2r-c}],\\
&\zeta\Delta v=a[e^{\sqrt{-1}\omega}\sum E_r\zeta^{-2r-c}+e^{-\sqrt{-1}\omega}\sum F_r\zeta^{-2r+c}].
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

其中 ω 为任意常数，c 为未定常数，这些将在下面求出。以(23)代入(22)式，在 M_i 或 N_i 与(23)的系数相乘时令 $j=r+i$，其它情况令 $j=r$，则得

$$\sum_j e^{-\sqrt{-1}\omega}\zeta^{2j+c}[E_j(2j+c+1+m)^2+\sum_i(M_iE_{j-i}+N_iF_{i-j})]$$
$$+\sum_j e^{\sqrt{-1}\omega}\zeta^{2j-c}[F_j(2j-c+1+m)^2+\sum_i(M_iE_{j-i}+N_iF_{i-j})]=0.$$

此为一恒等式，可令 ζ^{2j+c}, ζ^{2j-c} 的系数为 0, 卽对任何的 j 有

$$E_j(2j+c+1+m)^2+\sum_i(M_iE_{j-i}+N_iF_{i-j})=0,$$

$$F_j(2j-c+1+m)^2+\sum_i(M_iF_{j-i}+N_iE_{i-j})=0.$$

如把 $i=0$ 的項单独列出，在第二式中把 j 換为 $-j$, 于是得

$$\left.\begin{aligned}&E_j[(2j+c+1+m)^2+M_0]+N_0F_{-j}\\&\qquad+\sum_i{}'(M_iE_{j-i}+N_iF_{i-j})=0,\\&F_{-j}[(2j+c-1-m)^2+M_0]+N_0E_j\\&\qquad+\sum_i{}'(M_iF_{j-i}+N_iE_{i-j})=0.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

由(24)式可以用逐步近似法求出所有的 E_j 和 F_j, 这些都是 m 的函数。由于后面討論用到的項数很少，故这里不去逐一求出，后面用到时再求。

在 (24) 中，c 还未确定，現在用下面的近似方法来求。由于 M_i, N_i 都与 $m^{|2i|}$ 同数量級，故在(24)式中，若只准到 m^2, 可得在 $j=0$ 时有

$$\left.\begin{aligned}&E_0[(c+1+m)^2+M_0]+N_0F_0=0,\\&E_0N_0+F_0[(c-1-m)^2+M_0]=0.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

由此两式可以把 E_0 与 F_0 都消去得

$$[(c+1+m)^2+M_0][(c-1-m)^2+M_0]-N_0^2=0.\tag{26}$$

这里只准到 m^2, 故由前面結果知

$$2M_0=1+2m+\frac{5}{2}m^2,\quad N_0^2=9M_0^2-\frac{9}{2}m^2.$$

(26)式可化为

$$[c^2-(1+m)^2]^2+2M_0[c^2+(1+m)^2]=8M_0^2-\frac{9}{2}m^2$$

或 $$[c^2-(1+m)^2]^2+2M_0[c^2-(1+m)^2]$$

$$=4M_0[2M_0-(1+m)^2]-\frac{9}{2}m^2=9M_0m^2-\frac{9}{2}m^2.$$

如只准到 m，则由于右端为 m^2，故近似值为

$$c=1+m.$$

若准到 m^2，则令 $c=1+m+c'$ 代入，而 c' 与 m^2 同数量級，可解出

$$c'=-\frac{3}{4}m^2,$$

于是

$$c=1+m-\frac{3}{4}m^2. \tag{27}$$

若要更高次項，可用同样方法逐步近似求出。

如只准到 m^2，利用(27)式代入(25)式，可以求出

$$F_0=-E_0\frac{N_0}{M_0}=-3(1-m^2)E_0. \tag{28}$$

至于 E_{-1}，F_1，可在(24)式中令 $j=-1$。由于只准到 m^2，故有

$$E_{-1}[(c-1+m)^2+M_0]+N_0F_1+M_{-1}E_1+N_{-1}F_0=0,$$

$$E_{-1}N_0+F_1[(3+m-c)^2+M_0]+M_1F_0+N_1E_0=0.$$

消去 F_1 可以解出 E_{-1}；相反地，消去 E_{-1} 可以解出 F_1。如只准到 m^2，则可得

$$\left.\begin{aligned}E_{-1}&=\left(-\frac{45}{8}m-\frac{555}{32}m^2\right)E_0,\\ F_1&=\left(\frac{15}{8}m+\frac{277}{32}m^2\right)E_0.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

同样，若在(24)式中令 $j=1$，如也只准到 m^2，则可得

$$E_1=\frac{3}{4}m^2E_0,\quad F_{-1}=-\frac{1}{8}m^2E_0. \tag{30}$$

其实如继續討論下去，可得 E_{-r}，F_r（其中 $r>0$）与 m^{2r-1} 同数量級；E_r，F_{-r} 与 m^{2r} 同数量級。另外，各系数都含有 E_0 的因子，故可把 E_0 看作积分常数。也就是(22)式的解[(23)式]有两个积分常数 ω 及 E_0。

根据上面結果，可以化(23)式为

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta u &= a\zeta e^{-\sqrt{-1}\omega}\left[E_0\zeta^{c}+E_{-1}\zeta^{c-2}+E_1\zeta^{c+2}\right] \\
&\quad + a\zeta e^{\sqrt{-1}\omega}\left[F_0\zeta^{-c}+F_{-1}\zeta^{-c-2}+F_1\zeta^{-c+2}\right]+\cdots, \\
\Delta v &= a\zeta^{-1}e^{\sqrt{-1}\omega}\left[E_0\zeta^{-c}+E_{-1}\zeta^{2-c}+E_1\zeta^{-2-c}\right] \\
&\quad + a\zeta^{-1}e^{-\sqrt{-1}\omega}\left[F_0\zeta^{c}+F_1\zeta^{c-2}+F_{-1}\zeta^{c+2}\right]+\cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{31}
$$

其中系数 E_0, E_1, E_{-1}, F_0, F_1, F_{-1}, 可采用(28), (29), (30)的結果。

与討論二均差的方法一样，由(1), (2)式得

$$
e^{2\sqrt{-1}(v-nt-\varepsilon)}=\frac{u\zeta^{-1}}{v\zeta},
$$

但这里应把 u, v 换成 $u+\Delta u$, $v+\Delta v$. 其中 u, v 用(8)式結果; Δu, Δv 用(31)式結果。如只准到 m^2, 則得

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{-1}(v-nt-\varepsilon)=\ln(u+\Delta u)\zeta^{-1}-\ln(v+\Delta v)\zeta \\
&=a_1(\zeta^2-\zeta^{-2})+a_{-1}(\zeta^{-2}-\zeta^2) \\
&\quad+e^{-\sqrt{-1}\omega}\left[(E_0-F_0)\zeta^{c}+(E_{-1}-F_1)\zeta^{c-2}+(E_1-F_{-1})\zeta^{c+2}\right] \\
&\quad+e^{\sqrt{-1}\omega}\left[(F_0-E_0)\zeta^{-c}+(F_{-1}-E_1)\zeta^{-c-2}+(F_1-E_{-1})\zeta^{-c+2}\right].
\end{aligned}
$$

因此得

$$
\begin{aligned}
v&=nt+\varepsilon+(a_1-a_{-1})\sin 2\xi+(E_0-F_0)\sin(c\xi-\omega) \\
&\quad+(E_{-1}-F_1)\sin[(c-2)\xi-\omega]+(E_1-F_{-1})\sin[(c+2)\xi-\omega].
\end{aligned}
$$

以准到 m^2 的各系数值代入得

$$
\begin{aligned}
v=nt+\varepsilon&+\frac{11}{8}m^2\sin 2\xi+4E_0\sin(c\xi-\omega) \\
&-\left(\frac{15}{2}m+\frac{203}{8}m^2\right)E_0\sin[(c-2)\xi-\omega] \\
&+\frac{17}{4}m^2c\sin[(c+2)\xi-\omega].
\end{aligned} \tag{32}
$$

其中 $\sin 2\xi$ 的項即为前討論过的二均差。在真黄經 v 中，含有 $\sin[(c-2)\xi-\omega]$ 項的系数比較大，称为出差，在勃朗的理論中，直接取 $E_0=\frac{e}{2}$ (e 为月球軌道的偏心率)，因此这項的系数为73′. 这

早在托勒玫时代已发現，周期比朔望月稍多一些，約31.8日。

3．椭圓差 在(32)式中，含 $\sin(c\xi-\omega)$ 的項称为椭圓差。因勃朗取 $E_0=\frac{e}{2}$，此項相当于椭圓运动所产生，系数为 $2e$，約6°.3，周期比朔望月略小。

4．近地点移动 若沒有摄动，則按椭圓运动应有（略去 e^2 項）

$$v=nt+\varepsilon+2e\sin 2M,$$

即椭圓差应为 $2e\sin 2M$。与(32)式中椭圓差比較，則应有

$$M=c\xi-\omega=c(n-n_1)t+c(\varepsilon-\varepsilon_1)-\omega.$$

而
$$m=\frac{n_1}{n-n_1},$$

故
$$n_1=\frac{mn}{1+m},$$

即
$$M=\frac{c}{1+m}nt+c(\varepsilon-\varepsilon_1)-\omega.$$

但平近点角 $M=nt+\varepsilon-\tilde{\omega}$，因此得近地点經度

$$\tilde{\omega}=\left(1-\frac{c}{1+m}\right)nt+c(\varepsilon-\varepsilon_1)-\varepsilon-\omega$$

$$=\left(1-\frac{c}{1+m}\right)nt+\tilde{\omega}_0.$$

也就是說，$\tilde{\omega}$ 不是常数，而是在变化的。以 c 的値代入，如准到 m^3，

則
$$\tilde{\omega}=\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{177}{32}m^3\right)nt+\tilde{\omega}_0.$$

如以 m 的数値代入，則 $\tilde{\omega}$ 不斷增加，約8.85年增加 2π，卽月球軌道近地点繞地球順行，約8.85年轉一圈。

§7 緯度的公式

上面只考慮太阳摄动重要項，得到了向徑和經度的結果，現在来討論緯度。同样只考慮太阳摄动重要項，略去太阳軌道偏心率和視差，卽在(6-3-9)式中仍令 $w=0$，得

$$D^2z-\left(\frac{k}{r^3}+m^2\right)z=0, \tag{1}$$

其中 $r^2=uv+z^2$。在近似討論中，可把(1)式中的 r 取为

$$r^2=uv=\rho^2,$$

此时系数可表为 ξ 的級数，即(6-6-18)式

$$\frac{k}{r^3}+m^2=2\sum M_i\zeta^{2i}. \tag{2}$$

M_i 的定义見(6-6-19)式，而且有 $M_i=M_{-i}$。

由于在二体問題中，$z=r\sin(\omega+f)\sin i$ （参看第二章§6），故与 $\sin i$ 同数量級，而且是表为 $\omega+f=v-\Omega$ 的正弦級数。于是令 $Z=\sqrt{-1}\,z$，則(1)式可化为

$$D^2Z=2(\sum M_i\zeta^{2i})Z. \tag{3}$$

与上节求 Δu, Δv 的方法一样，設(3)式的解为

$$Z=a\gamma e^{\sqrt{-1}\beta}\sum C_j\zeta^{2j+g}. \tag{4}$$

其中 $\gamma=\sin i$, β 作为积分常数，g 为一参量，将在后面求出(相当于 Δu, Δv 中的 c)。在这里 C_0 可取为 1，并不失一般性。按 Z 的定义，z 应为它的虛数部分，即由(4)式得

$$z=a\gamma\sum C_j\sin[(2j+g)\xi+\beta]. \tag{5}$$

以(4)式代入(3)，比較 ζ 的系数可得

$$(g+2j)^2C_j=2\sum_i M_{j-i}C_i. \tag{6}$$

从(6)式可用逐步近似法求出 g 和 C_i。由于 $C_0=1$, $M_i=M_{-i}$ 与 m^{2i} 同数量級。如只要求准到 m^3，在(6)式中令 $j=0, 1, -1$，于是得

$$g^2=2M_0+2M_{-1}C_1+2M_1C_{-1}+\cdots; \tag{7}$$

$$(g+2)^2C_1=2M_0C_1+2M_1+\cdots; \tag{8}$$

$$(g-2)^2C_{-1}=2M_0C_{-1}+2M_{-1}+\cdots. \tag{9}$$

第一步只准到 m，則由(7)式中略去 M_1, M_{-1}，可得

$$g^2=2M_0=1+2m, \quad 即 \quad g=1+m.$$

再代入第(8)，(9)式，可求出 C_1, C_{-1} 的近似值为

$$C_1=\frac{3}{16}m^2, \quad C_{-1}=-\frac{3}{8}m.$$

以它們代入(7)再求 g，則可得

$$g=1+m+\frac{3}{4}m^2-\frac{33}{32}m^3. \tag{10}$$

反回来再代入(8)，(9)式可得

$$C_1=\frac{3}{16}m^2, \quad C_{-1}=-\frac{3}{8}m-\frac{29}{32}m^2. \tag{11}$$

于是代入(5)式，得

$$z=a\gamma\sin(g\xi+\beta)+a\gamma\left(\frac{3}{16}m^2\right)\sin[(g+2)\xi+\beta]$$
$$+a\gamma\left(-\frac{3}{8}m-\frac{29}{32}m^2\right)\sin[(g-2)\xi+\beta]. \tag{12}$$

因 $z=r\sin b$，其中 b 为黄緯。故由(12)式可以求出 b，主要項为

$$z=r\sin b=a\gamma\sin(g\xi+\beta). \tag{13}$$

在无摄动运动中

$$z=r\sin b=r\sin i\sin(\omega+f), \tag{14}$$

如略去軌道偏心率，則 $f=M=nt+\varepsilon-\Omega-\omega$. 在取这样的近似値时，可以取 $r=a$，而 $\gamma=\sin i$，于是比較(13)，(14)式可得

$$\omega+M=g\xi+\beta,$$

即
$$nt+\varepsilon-\Omega=g(n-n_1)t+g(\varepsilon-\varepsilon_1)+\beta,$$

但
$$n-n_1=\frac{n}{1+m},$$

故得

$$\Omega=\left(1-\frac{g}{1+m}\right)nt+\varepsilon-g(\varepsilon-\varepsilon_1)-\beta$$
$$=-\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{57}{32}m^3\right)nt+\Omega_0. \tag{15}$$

(15)式即表明月球軌道升交点在逆行移动。用 m 的数值代入可得 Ω 在 18.6 年增加 2π，即月球軌道面与黄道面的交綫在逆行，每隔 18.6 年轉一圈。这点在中国古代早已发現，18.6 年即称为一章。在研究日月食及岁差章动时很重要。

§ 8 太阳軌道偏心率的攝动

前面几节都是略去了太阳軌道的偏心率，現在进一步考虑它的影响，但这里仍略去 i 和太阳視差。故相应的攝动函数为

$$R_2 = n_1^2 r^2 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 P_2(c).$$

则相应的
$$\Omega_2 = n_1^2 r^2 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 P_2(c) - \frac{1}{2} n_1^2 (2x^2 - y^2),$$

$$W_2 = \frac{2\Omega}{(n-n_1)^2} = 2m^2 r^2 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 P_2(c) - m^2(3x^2 - r^2).$$

而
$$r^2 P_2(c) = \frac{3}{2} r^2 c^2 - \frac{1}{2} r^2 \quad (\text{其中 } c = \cos\alpha),$$

并且
$$rc = \frac{xx_1 + yy_1}{r_1}.$$

令 v_1 表示太阳眞黄經，ϕ 表示眞黄經与平黄經之差：

$$\phi = v_1 - (t - t_0) n_1 = f_1 - M_1, \tag{1}$$

其中 f_1，M_1 表示太阳的眞近点角和平近点角。由于 x 軸指向太阳平位置，因此有

$$x_1 = r_1 \cos\phi, \quad y_1 = r_1 \sin\phi.$$

于是

$$rc = x\cos\phi + y\sin\phi = \frac{1}{2}(u+v)\cos\phi + \frac{1}{2\sqrt{-1}}(u-v)\sin\phi$$
$$= \frac{1}{2}\left(ue^{-\sqrt{-1}\phi} + ve^{\sqrt{-1}\phi}\right).$$

由于
$$r^2 = uv, \quad x = \frac{1}{2}(u+v),$$

因此 $$W_2=2m^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 r^2P_2(c)-m^2(3x^2-r^2)$$

$$=2m^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(ue^{-\sqrt{-1}\phi}+ve^{\sqrt{-1}\phi}\right)^2-\frac{1}{2}uv\right]$$

$$-m^2\left[\frac{3}{4}(u+v)^2-uv\right]=Au^2+2Buv+Cv^2. \tag{2}$$

其中

$$A=\frac{3}{4}m^2\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3e^{-2\sqrt{-1}\phi}-1\right], \tag{3}$$

$$B=\frac{1}{4}m^2\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3-1\right], \tag{4}$$

$$C=\frac{3}{4}m^2\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3e^{2\sqrt{-1}\phi}-1\right]. \tag{5}$$

则 A, B, C 只与太阳坐标有关。

設 e_1 为太阳軌道偏心率，若只准到 e_1，则由二体問題的关系得

$$\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3=(1+e_1\cos f_1)^3=1+3e_1\cos f_1=1+3e_1\cos M_1,$$

$$\phi=f_1-M_1=2e_1\sin M_1.$$

则 $$\sin 2\phi=4e_1\sin M_1,\quad \cos 2\phi=1,$$

$$\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\sin 2\phi=4e_1\sin M_1,\quad \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\cos 2\phi=1+3e_1\cos M_1.$$

因此，从(3)，(5)式得

$$C+A=\frac{3}{2}m^2\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\cos 2\phi-1\right]=\frac{9}{2}m^2e_1\cos M_1,$$

$$C-A=\frac{3}{2}\sqrt{-1}\,m^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\sin 2\phi=6m^2e_1\sqrt{-1}\sin M_1.$$

故 $$C=\frac{3}{4}m^2e_1\left(\frac{7}{2}e^{\sqrt{-1}M_1}-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{-1}M_1}\right),$$

$$A=\frac{3}{4}m^2e_1\left(-\frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}M_1}+\frac{7}{2}e^{-\sqrt{-1}M_1}\right).$$

但 $M_1 = e - \widetilde{\omega}_1 = n_1(t-t_0) - \widetilde{\omega}_1 = m(n-n_1)(t-t_0) - \widetilde{\omega}_1 = m\xi - \widetilde{\omega}_1$，

则
$$e^{\sqrt{-1}M_1} = \zeta^m e^{-\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1}.$$

于是

$$C = \frac{3}{4} m^2 e_1 \left(\frac{7}{2} \zeta^m e^{-\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} - \frac{1}{2} \zeta^{-m} e^{\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} \right), \tag{6}$$

$$A = \frac{3}{4} m^2 e_1 \left(-\frac{1}{2} \zeta^m e^{-\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} + \frac{7}{2} \zeta^{-m} e^{\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} \right). \tag{7}$$

同样

$$B = \frac{1}{4} m^2 \left[\left(\frac{a_1}{r_1} \right)^3 - 1 \right] = \frac{3}{4} m^2 e_1 \sin M_1$$
$$= \frac{3}{8} m^2 e_1 \left(\zeta^m e^{-\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} + \zeta^{-m} e^{\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} \right). \tag{8}$$

若采用(6-3-10)，(6-3-13)式，由于 $z=0$，则为

$$D(uDv - vDu - 2muv) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - v^2) = v \frac{\partial W_2}{\partial u} - u \frac{\partial W_2}{\partial v}, \tag{9}$$

$$D^2(uv) - Du \cdot Dv + 2m(vDu - uDv) + \frac{9}{4} m^2 (u+v)^2$$
$$= C - 3W_2 + D^{-1}(D_t W_2). \tag{10}$$

(9)式右端求偏微商时应与太阳坐标无关，結果应为

$$2Cv^2 - 2Au^2.$$

再以(6)，(7)式代入，則成为 ζ 的函数。

(10) 式右端中 $D_t W_2$ 是只对太阳坐标中的 ζ 求偏微商，也就是只对 A, B, C 运算，即

$$D_t W_2 = u^2 D_t A + 2uv D_t B + v^2 D_t C.$$

根据(6)，(7)，(8)式应有

$$D_t A = \frac{3}{4} m^2 e_1 \left(-\frac{1}{2} \zeta^m e^{-\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} - \frac{7}{2} \zeta^{-m} e^{\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} \right),$$

$$D_t C = \frac{3}{4} m^2 e_1 \left(\frac{7}{2} \zeta^m e^{-\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} + \frac{1}{2} \zeta^{-m} e^{\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} \right),$$

$$D_t B = \frac{3}{8} m^2 e_1 \left(\zeta^m e^{-\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} - \zeta^{-m} e^{\sqrt{-1}\widetilde{\omega}_1} \right).$$

这些都是 ζ 的函数。

仍然用前面相同的方法，令 u, v 为 ζ 的級数，再代入方程(9)，(10) 中，令 ζ 的系数为 0，就可以求出 u, v 的級数的系数。这里由于方程右端出现 ζ^{m}，因此級数的形式应为

$$u = a\zeta\sum A_{i,p}\zeta^{2i+pm},\quad v = a\zeta^{-1}\sum A_{i,p}\zeta^{-2i-pm}.$$

計算过程很复杂，但方法是一样，这里不詳細讲了。求出 u, v 后，仍然利用(6-6-1)，(6-6-2)式

$$r\cos(v-nt-\varepsilon) = \frac{1}{2}(u\zeta^{-1}+v\zeta),$$

$$r\sin(v-nt-\varepsilon) = \frac{1}{2}\sqrt{-1}(v\zeta-u\zeta^{-1}),$$

可得到相应的在 r 和 v 上的改正項。如准到 m^2 項，結果为

$$\left.\begin{aligned}
r\cos(v-nt-\varepsilon) &= ae_1m^2\Big[\frac{3}{2}\sin(m\xi-\tilde{\omega}_1) \\
&\quad +\frac{1}{2}\cos(2\xi+m\xi-\tilde{\omega}_1)-\frac{7}{2}\cos(2\xi-m\xi+\tilde{\omega}_1)\Big], \\
r\sin(v-nt-\varepsilon) &= ae_1\Big[-3(m-m^2)\sin(m\xi-\tilde{\omega}_1) \\
&\quad -\frac{11}{16}m^2\sin(2\xi+m\xi-\tilde{\omega}_1)+\frac{77}{16}\sin(2\xi-m\xi+\tilde{\omega}_1)\Big].
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

其中引数为 $(m\xi-\tilde{\omega}_1)$ 的項，由于周期为一年，故称周年差。

§9　太阳視差的摄动

前面討論都忽略了太阳視差的影响，即在摄动函数中略去了 $\frac{1}{a_1}$，現在来討論。这里只考虑太阳視差，略去太阳軌道偏心率以及 z，于是 $W_2=0$，$D_tW=0$。取

$$W = W_3 = 2m^2a_1^{-1}P_3(c)\,r^3 = m^2a_1^{-1}(5r^3c^3-3r^3c).$$

由于偏心率 $e_1=0$，故 $x_1=a_1$，$y_1=0$，

$$rc = \frac{xa_1}{a_1} = x = \frac{1}{2}(u+v).$$

又 $r^2=uv$，故得

$$W_3=\frac{1}{8}\frac{m^2}{a_1}[5(u+v)^3-12uv(u+v)],$$

因此 $$v\frac{\partial W}{\partial u}-u\frac{\partial W_3}{\partial v}=-\frac{3}{8}\frac{m^2}{a_1}[5(u^3-v^3)+uv(u-v)].$$

仍然采用 (6-9-9)，(6-9-10)式，此时方程右端很簡单，只是 u, v 的多項式。因此解方程时只需令 u, v 为 ζ 的普通級数就行了，但为了便于比較系数，令

$$u=a^2\frac{\zeta}{a_1}\sum\alpha_{2i+1}\zeta^{2i+1},\quad v=a^2\frac{\zeta^{-1}}{a_1}\sum\alpha_{-2i-1}\zeta^{2i+1}.$$

代入方程(9)，(10)后比較系数，可用逐步近似法得到所有的 α_{2i+1}，这里不算了。求出后再代入 $r\cos(v-nt-\varepsilon)$ 及 $r\sin(v-nt-\varepsilon)$，得到相应的改正項。若只准到 m^2，則結果为

$$r\cos(v-nt-\varepsilon)=\frac{a_1^2}{a_1}\left[\left(\frac{15}{16}m+\frac{33}{8}m^2\right)\cos\xi-\frac{25}{64}m^2\cos 3\xi\right],$$

$$r\sin(v-nt-\varepsilon)=\frac{a_1^2}{a_1}\left[-\left(\frac{15}{8}m+\frac{39}{4}m^2\right)\sin\xi+\frac{15}{32}m^2\sin 3\xi\right].$$

其中引数为 ξ 的項較大，周期为一朔望月，称为月角差。

§10 其它的摄动

上面各节的討論都只考虑太阳吸引所产生的摄动，而且还分成了好多种，每一种只取了非常粗略的近似值，但都可以用逐步近似法求到所要求的精确度。而且在討論时，把各种摄动孤立地研究，这也是不完全的，还应該考虑各种摄动的相互共同影响。勃朗在造月球运动表时都已全部考虑在內。

但除太阳摄动外，还有下列几种摄动必需考虑。由于討論非常繁，而方法原理也是一样，在这里不讲，讀者可自己查閱有关文献(見本章末所引的文献)。

一、地球形状的摄动

由于地球不是球形，以及密度分布不均匀所产生的摄动。討論这种摄动时，只需在摄动函数中加上一項。根据(1-6-6)式，增加的項可取为

$$R_1=\frac{GJMR_{\oplus}^2}{3r^3}e^2(1-3\sin^2\delta).$$

其中 r 为月球距离(到地心)；$R_{\oplus}$ 为地球赤道半徑；δ 为月球赤緯；可化为月球直角坐标。其它符号在第一章 § 6 中都讲过了。

二、行星的直接摄动

由于行星直接对月球的吸引产生的摄动，完全与太阳的吸引情况一样，对每个行星只要加一項摄动函数就行了。在赫耳-勃朗理論中，考慮了金、木、水、火、土五大行星的摄动。

三、行星的間接摄动

主要是行星对太阳的影响，使太阳不是按椭圓軌道运动，相应地使太阳对月球的摄动发生变化。根据实际計算結果，行星間接摄动比直接摄动还要大。

四、黃道平面变化的摄动

由于行星之間的相互吸引，黃道面在不断变化，对月球运动也有显著影响。

五、月球平均运动的长期加速度

主要由于地球軌道的偏心率 e_1 有长期減小的趋势，相应地使月球平均运动 n 不断增加，与 e_1 減小的速率成正比。經过很多人的研究，n 的理論值每百年增加 5.″72，但从长期的日食观测結果，应为 11″。关于这个差别，很多人解释为潮汐摩擦使地球自轉长期減慢，估計影响为 5.″3，这似乎可以解释，但还未最后下結論。也有人认为是牛頓万有引力定律本身的偏差。

但地球軌道偏心率不是永远減小，大約到 24000 年后，e_1 达到

极小值，以后又要不断增加，則月球平均运动 n 又要不断减小，月球愈来愈离地球远。

关于这几种摄动的詳細討論，可参看勃朗的研究論文❶。

---

❶ Brown: Memoirs of Royal Astronomical Society, Vol. LIII, p. 39, p. 163; Vol. LIV, p. 1; Vol. LVII, p. 51; Vol. LIX, p. 1.

第七章　岁差和章动的理論

在前面几章中，都是把天体考虑成为质点，也就是认为天体的全部质量集中于它的质量中心，而不考虑天体的形状和内部密度分布。这种考虑只适用于相距較远天体的相互作用下的运动，例如行星的运动。对于距离較近的天体就不行了，必须考虑天体形状和密度分布。在这里，我們只研究由于地球形状在日月影响下产生的一种重要現象——岁差和章动。对于一般天体的运动只簡单說明。在討論过程中，我們作了一种近似假設，认为地球是剛体，也就是认为地球内部任意两点的相互距离不变。这样假設对于研究岁差和章动現象是足够了。岁差和章动的理論基础是剛体动力学，关于这些内容，大家在理論力学中已經学过了，在这里只把有关問題的提一下，不再詳細讲述。

§1　地球不是均勻球体产生的力函数

我們认为地球是剛体。根据对地球的实际考察，地球的质量分布对称于三个相互垂直的平面，其中之一很接近于赤道面（由于地极移动，赤道面在地球内不是固定的，但对称面是固定的，赤道面与对称面的交角不超过 $0''.3$，在討論岁差章动理論时可把赤道面作为对称面）。地球形状是接近于旋轉橢球体的，严格地說，它对外面一质点或天体的吸引，特别是对較近的天体（如日、月、人造地球卫星等），不能看作质点。反过来說，其他天体对地球的吸引，使地球自轉运动复杂化。下面先得到力函数的具体形式，再具体研究这个影响的情况。

根据上面的假設，取质量中心 O 为原点；以中心慣性主軸(即对称面的交綫)为 x, y, z 軸；x–y 平面是很接近于赤道面；但在討論岁差章动时略去这个差别。

設 P 为地球內任意一点，质量为 dm，由于 x, y, z 为对称軸，O 为质量中心，故有关系式

$$\iiint x\,dm=\iiint y\,dm=\iiint z\,dm=0; \tag{1}$$

$$\iiint yz\,dm=\iiint zx\,dm=\iiint xy\,dm=0; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\iiint x^3\,dm=\iiint x^2y\,dm=\iiint x^2z\,dm=0;\\ \iiint y^3\,dm=\iiint y^2x\,dm=\iiint y^2z\,dm=0;\\ \iiint z^3\,dm=\iiint z^2y\,dm=\iiint z^2x\,dm=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

为了后面討論方便起見，設主慣性矩为

$$\left.\begin{aligned}A&=\iiint (y^2+z^2)\,dm,\\ B&=\iiint (z^2+x^2)\,dm,\\ C&=\iiint (x^2+y^2)\,dm.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

設 Q 为另一天体，視为质点；$OQ=\rho$，$OP=r$，$PQ=\Delta$；θ 表示 OP，OQ 之間的交角；再設 OQ 的方向余弦为 (l, m, n)；P 点坐标为 (x, y, z)。再取另一坐标系統：仍以 O 为原点；$\overrightarrow{OQ}$ 为 ξ 軸；η，ζ 軸在 ξ 的垂直平面上，則 P 点相应的坐标为 (ξ, η, ζ)。根据定义

$$\Delta^2=\rho^2+r^2-2\rho r\cos\theta=\rho^2+r^2-2\rho\xi. \tag{5}$$

而地球对 Q 的力函数为

$$U=GM\iiint\frac{dm}{\Delta}, \tag{6}$$

其中 M 为天体 Q 的质量，在这里我們假定 ρ 比 r 大得多（在月球情况下，$\rho\approx 60r$），可視 $\frac{r}{\rho}$ 或 $\frac{\xi}{\rho}$ 为小量，于是根据(5)式

$$\varDelta^2=\rho^2\left(1-\frac{2\xi\rho-r^2}{\rho^2}\right),\qquad \frac{1}{\varDelta}=\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{2\xi\rho-r^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

按二項式定理展开得

$$\frac{1}{\varDelta}=\frac{1}{\rho}\Big[1+\frac{\xi}{\rho}+\frac{3\xi^2-r^2}{2\rho^2}+\frac{5\xi^3-3\xi r^2}{2\rho^3}+\frac{35\xi^4-30\xi^2r^2+3r^4}{8\rho^4}+\cdots\Big]. \tag{7}$$

代入(6)，由于 ρ 与积分无关，按 ρ 为准，写为

$$U=\frac{GM}{\rho}\Big[x_0+\frac{x_1}{\rho}+\frac{x_2}{2\rho^2}+\frac{x_3}{2\rho^3}+\frac{x_4}{8\rho^4}+\cdots\Big]. \tag{8}$$

由于 $\overrightarrow{O\xi}$ 軸对 $x,\ y,\ z$ 軸的方向余弦为 $l,\ m,\ n$，则有

$$\xi=lx+my+nz. \tag{9}$$

其中 $l,\ m,\ n$ 与积分无关，則(8)式中各項积分为

$$x_0=\iiint dm=E\text{（地球质量）}; \tag{10}$$

利用(1)式得

$$x_1=\iiint\xi\,dm=\iiint(lx+my+nz)\,dm=0. \tag{11}$$

由于 $r^2=x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$，故

$$\begin{aligned}x_2&=\iiint(3\xi^2-r^2)\,dm\\&=\iiint[(y^2+z^2)+(z^2+x^2)+(x^2+y^2)]\,dm\\&\quad-3\iiint(\eta^2+\zeta^2)\,dm,\end{aligned}$$

根据(4)式得

$$x_2=A+B+C-3I. \tag{12}$$

其中 I 为地球对 OQ 軸的轉动慣量。利用(9)式可得

$$x_3=\iiint(5\xi^3-3\xi r^2)\,dm$$
$$=\iiint[5(lx+my+nz)^3$$
$$-3(lx+my+nz)(x^2+y^2+z^2)]\,dm. \tag{13}$$

将括弧展开后，各項成 x, y, z 的三次式，利用(3)式，知各項积分都等于零，即

$$x_3=0.$$

在 x_4 中，包含 $\frac{r}{\rho}\left(\text{或}\frac{\xi}{\rho}\right)$ 的四次冪。若只准确到三次冪，則可只展开到 x_3，于是按(10)，(11)，(12)，(13)得

$$U=GM\left(\frac{E}{\rho}+\frac{A+B+C-3I}{2\rho^3}\right), \tag{14}$$

其中 $$I=\iiint(\eta^2+\zeta^2)\,dm=\iiint(r^2-\xi^2)\,dm,$$

但因 $l^2+m^2+n^2=1$，故

$$I=\iiint[(l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2)-(lx+my+nz)^2]\,dm$$
$$=\iiint[l^2(y^2+z^2)+m^2(z^2+x^2)+n^2(x^2+y^2)-2lmxy$$
$$-2mnyz-2lnxz]\,dm.$$

利用(2)，(4)得

$$I=l^2A+m^2B+n^2C=A-(A-B)m^2+(C-A)n^2. \tag{15}$$

代入(14)，設 Q 对 (x, y, z) 坐标系的坐标为 (X, Y, Z)，故 $m=\frac{Y}{\rho}$，$n=\frac{Z}{\rho}$，則

$$U=GM\left(\frac{E}{\rho}+\frac{B+C-2A}{2\rho^3}+\frac{3(A-B)Y^2-3(C-A)Z^2}{2\rho^5}\right). \tag{16}$$

这就是地球不是均匀球体产生的力函数，对地球外任一天体都相

同。对月球而言，M，ρ，(X, Y, Z)代表月球的量；对太阳而言代表太阳的量。在岁差和章动理論中，只考虑日、月就行了。同时考虑日、月时，需要把(16)写成相应日、月两項的和。

§2　欧拉角和剛体运动的欧拉方程

下面我們要用拉格朗日运动方程来列出剛体运动方程，需要先选好广义坐标。为了更好代表地球自轉軸在空間和在地球內部的变化，用下列方法选取剛体运动的坐标。

一、欧拉角

設O为地球质量中心，以O为中心作一球面，把定义的坐标系都投影到球面上。在图25中，設$OX_0Y_0Z_0$为历元t_0时的黄道直角坐标系，把它作为固定坐标系。Z_0为黄极方向；X_0的定义在后面再确定。設XYZ軸与地球中心慣性主軸重合，大圓XY与X_0Y_0相交于N点，則N就是大圓Z_0ZDH的极。用下面定义的三个量θ，φ，ψ表示XYZ对于固定坐标系$OX_0Y_0Z_0$的位置。

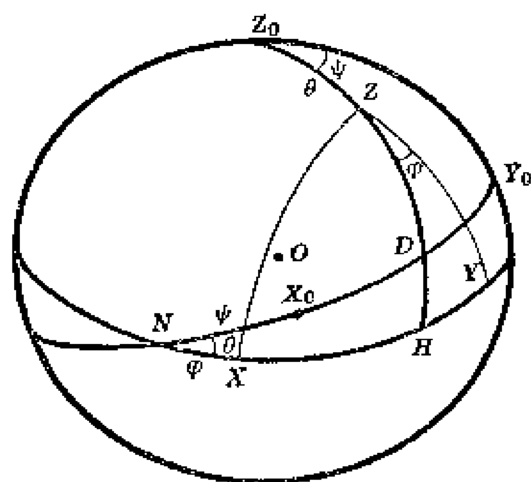


图　25

θ定义为大圓X_0Y_0对XY的交角，应等于大圓弧ZZ_0。在引入严格定义之前，可以把θ看成黄赤交角；N即为春分点。

φ定义为大圓弧NX；由N向$\overrightarrow{XY}$增加方向計算。它应該等于以N及X为极的大圓間的交角$\angle HZY$。

ψ定义为大圓弧X_0N或Y_0D，按$\overrightarrow{Y_0X_0}$方向計算，它应該等于大圓Z_0Z与Z_0Y_0之間的交角。

按照这样定义的θ，φ，ψ称为欧拉角。下面我們求出一个特

殊的关系。令(l_3, m_3, n_3)为OZ对$OX_0Y_0Z_0$坐标系的方向余弦；利用球面三角关系容易看出：

$$\left.\begin{aligned} l_3 &= \cos ZX_0 = \sin\theta\sin\psi, \\ m_3 &= \cos ZY_0 = \sin\theta\cos\psi, \\ n_3 &= \cos ZZ_0 = \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

如果令月球（或太阳）对$OXYZ$系的坐标为(x, y, z)，对$OX_0Y_0Z_0$坐标系为(ξ, η, ζ)，于是应有

$$\begin{aligned} z &= l_3\xi + m_3\eta + n_3\zeta \\ &= \xi\sin\theta\sin\psi + \eta\sin\theta\cos\psi + \zeta\cos\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

这个关系在后面要用到。因为月球（或太阳）对$OXYZ$系坐标用(x, y, z)表示，故上节的力函数应写为

$$U = GM\left(\frac{E}{\rho} + \frac{B+C-2A}{2\rho^3} + \frac{3(A-B)y^2 - 3(C-A)z^2}{2\rho^5}\right). \tag{3}$$

二、欧拉角的导数与角速度的关系

由于$OXYZ$坐标系随着地球自轉，故θ, φ, ψ也因地球自轉而变化。因此，地球自轉的角速度也应該可以用θ, φ, ψ的导数来表示。而地球自轉的瞬时角速度$\vec{\omega}$投影在$OXYZ$軸上的分量为p, q, r，因此p, q, r可以表示成为$\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$的函数，下面就来求出它們的关系式。

由于这些量都是轉动速度的分量，它們都是繞一定的軸轉动。在图中統一考虑：p为繞OX，q繞OY，r繞OZ。如我們規定反时針方向为正，則按θ, φ, ψ的定义，应有$\dot{\theta}$繞ON，但增加方向为負；$\dot{\varphi}$繞OZ，$\dot{\psi}$繞OZ_0，增加方向也为負。因为可以把$\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$視为$\vec{\omega}$的分量，利用投影定理可以有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} p &= -\dot{\theta}\cos XN + \dot{\varphi}\cos XZ - \dot{\psi}\cos XZ_0, \\ q &= -\dot{\theta}\cos YN + \dot{\varphi}\cos YZ - \dot{\psi}\cos YZ_0, \\ r &= -\dot{\theta}\cos ZN + \dot{\varphi}\cos ZZ - \dot{\psi}\cos ZZ_0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中各余弦项容易求出。显然，$\cos XZ=\cos YZ=\cos ZN=0$; $\cos ZZ=1$; $\cos ZZ_0=\cos\theta$; $\cos XN=\cos\varphi$; $\cos YN=-\sin\varphi$. 至于 $\cos XZ_0$，在球面三角形 XNZ_0 中，可得

$$\cos XZ_0=\sin\varphi\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\varphi\sin\theta. \tag{5}$$

同样，在三角形 YZ_0Z 中，有

$$\cos YZ_0=\sin\theta\cos(180^\circ-\varphi)=-\sin\theta\cos\varphi. \tag{6}$$

一起代入(4)得

$$\left.\begin{aligned}p&=-\dot\theta\cos\varphi+\dot\psi\sin\theta\sin\varphi,\\ q&=\dot\theta\sin\varphi+\dot\psi\sin\theta\cos\varphi,\\ r&=\dot\varphi-\dot\psi\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这就是要求的关系式。

三、欧拉方程

现在我們用 θ, φ, ψ 作剛体运动的广义坐标 (θ, φ, ψ 可决定 $OXYZ$ 位置，即剛体位置)，利用拉格朗日运动方程列出剛体运动方程。設剛体轉动的总动能为 T，則

$$2T=Ap^2+Bq^2+Cr^2 \tag{8}$$

按拉格朗日方程，对 φ 而言，有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi} \tag{9}$$

利用(8)式，由于 p, q, r 为 $\dot\theta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ 及 θ, φ, ψ 的函数，因此上式为

$$\frac{d}{dt}\left(Ap\frac{\partial p}{\partial\dot\varphi}+Bq\frac{\partial q}{\partial\dot\varphi}+Cr\frac{\partial r}{\partial\dot\varphi}\right)-\left(Ap\frac{\partial p}{\partial\varphi}+Bq\frac{\partial q}{\partial\varphi}+Cr\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial U}{\partial\varphi};$$

即

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=A\dot p\frac{\partial p}{\partial\dot\varphi}+B\dot q\frac{\partial q}{\partial\dot\varphi}+C\dot r\frac{\partial r}{\partial\dot\varphi}+Ap\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right]$$

$$+Bq\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right]+Cr\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right]. \tag{10}$$

根据(7)式知

$$\frac{\partial p}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial q}{\partial\dot{\varphi}}=0,$$

$$\frac{\partial r}{\partial\dot{\varphi}}=1,\quad \frac{\partial p}{\partial\varphi}=q,\quad \frac{\partial q}{\partial\varphi}=-p,\quad \frac{\partial r}{\partial\varphi}=0.$$

代入(10)得

$$C\dot{r}-(A-B)pq=\frac{\partial U}{\partial\varphi}. \tag{11}$$

再对欧拉角 θ 来求,可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=\frac{\partial U}{\partial\theta}. \tag{12}$$

同上,有

$$\frac{\partial U}{\partial\theta}=A\dot{p}\frac{\partial p}{\partial\dot{\theta}}+B\dot{q}\frac{\partial q}{\partial\dot{\theta}}+C\dot{r}\frac{\partial r}{\partial\dot{\theta}}+Ap\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]$$

$$+Bq\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial q}{\partial\theta}\right]+Cr\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial r}{\partial\theta}\right]. \tag{13}$$

根据(7)式知

$$\frac{\partial p}{\partial\dot{\theta}}=-\cos\varphi,\quad \frac{\partial q}{\partial\dot{\theta}}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial r}{\partial\dot{\theta}}=0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial q}{\partial\theta}=\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial r}{\partial\theta}=\dot{\psi}\sin\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial p}{\partial\theta}=\dot{\varphi}\sin\varphi-\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi$$

$$=\sin\varphi(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)=r\sin\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial q}{\partial\theta}=\dot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi=r\cos\varphi.$$

(13)式最后括弧中 $\frac{\partial r}{\partial\theta}=\dot{\psi}\sin\theta=p\sin\varphi+q\cos\varphi$,连同上面一并代入(13)式得

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -A\dot{p}\cos\varphi + B\dot{q}\sin\varphi + (A-C)pr\sin\varphi$$
$$+ (B-C)qr\cos\varphi. \tag{14}$$

最后，对欧拉角 ψ，有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi}. \tag{15}$$

同上，有

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = A\dot{p}\frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}} + B\dot{q}\frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}} + C\dot{r}\frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}} + Ap\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial p}{\partial \psi}\right]$$
$$+ Bq\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial q}{\partial \psi}\right] + Cr\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial r}{\partial \psi}\right]. \tag{16}$$

根据(7)式有

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}} = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}} = \sin\theta\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}} = -\cos\theta, \qquad \frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{\partial q}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}}\right) = \frac{d}{dt}(\sin\theta\sin\varphi) = \cos\theta\sin\varphi\cdot\dot{\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi.$$

而
$$\dot{\theta} = q\sin\varphi - p\cos\varphi,$$
$$\dot{\varphi}\sin\theta = r\sin\theta + \dot{\psi}\cos\theta\sin\theta$$
$$= r\sin\theta + p\cos\theta\sin\varphi + q\cos\theta\cos\varphi.$$

一并代入前式得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{dp}{d\dot{\psi}}\right) &= \cos\theta\sin\varphi(q\sin\varphi - p\cos\varphi)\\
&\quad + \cos\varphi(r\sin\theta + p\cos\theta\sin\varphi + q\cos\theta\cos\varphi)\\
&= q\cos\theta + r\sin\theta\cos\varphi.\\
\text{同理}\quad&\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}}\right) &= \frac{d}{dt}(\sin\theta\cos\varphi) = -p\cos\theta - r\sin\theta\sin\varphi;\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}}\right) &= \frac{d}{dt}(-\cos\theta) = \dot{\theta}\sin\theta = \sin\theta(q\sin\varphi\\
&\quad - p\cos\varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(16)式右端前面三項为

$$A\dot{p}\sin\theta\sin\varphi+B\dot{q}\sin\theta\cos\varphi-C\dot{r}\cos\theta,$$

利用(11)式有:

$$-C\dot{r}\cos\theta=-(A-B)pq\cos\theta-\cos\theta\ \frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

(16)式右端后三項即为(17),合并后除以 $\sin\theta$ 得

$$A\dot{p}\sin\varphi+B\dot{q}\cos\varphi-(B-C)qr\sin\varphi+(A-C)pr\cos\varphi$$
$$=\operatorname{ctg}\theta\ \frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial U}{\partial\psi}. \tag{18}$$

将(14),(18)式按 p, q 整理得

$$\left.\begin{aligned}
A\dot{p}-(B-C)qr&=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\theta\ \frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)\\
&\quad-\cos\varphi\ \frac{\partial U}{\partial\theta};\\
B\dot{q}-(C-A)rp&=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\theta\ \frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)\\
&\quad+\sin\varphi\ \frac{\partial U}{\partial\theta};\\
&\text{(11)式为}\\
C\dot{r}-(A-B)pq&=\frac{\partial U}{\partial\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

这就是刚体运动的欧拉方程。

这个方程左端变量是 p, q, r, 即瞬时角速度在 $OXYZ$ 三軸上的投影,而右端变量为欧拉角 θ, φ, ψ. 原因是 U 不便表为 p, q, r 的函数。而 p, q, r 本身又是代表速度,不能作为广义坐标。但如以 p, q, r 作变量,則求得的結果可以表示地球瞬时自轉速度大小和自轉軸在地球体內的变化,这点在后面討論地球慣性运动时用到。但討論地球自轉軸在空間运动(即岁差、章动現象)时,应該用 θ, φ, ψ 作变量。下面就根据地球的特点,推出以 θ, φ, ψ 为变量的方程。

四、岁差章动基本方程

首先，地球形状非常接近于旋轉椭球体，如果我們假定地球内部质量分布也有旋轉对称；也就是說，在中心慣性主軸坐标系 $OXYZ$ 中，地球内部质点密度 ρ 只为 z 和 d_z（质点到 z 軸的距离）的函数，$\rho=\rho(z, d_z)=\rho(z, \sqrt{x^2+y^2})$，即对 z 軸旋轉对称，此时

$$A-B=\iiint(y^2-x^2)\,dm$$

$$=\iiint(y^2-x^2)\rho(z, \sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy\,dz=0. \qquad (20)$$

即 $A=B$。实际上，根据观測結果 $\frac{A-B}{C}$ 小于3000000分之一，在岁差章动的討論中，完全可以略去。

其次，关于力函数 U，根据(3)式得

$$U=GM\left(\frac{E}{\rho}+\frac{B+C-2A}{2\rho^3}+\frac{3(A-B)y^2-3(C-A)z^2}{2\rho^5}\right).$$

(x, y, z) 为月球(或太阳)对 $OXYZ$ 系的坐标。但在欧拉方程中，对 U 只取它对 θ, φ, ψ 的偏微商．而在上式中，除 y, z 外，都与 θ, φ, ψ 无关，又再令 $A=B$，则可以写成

$$U=-\frac{3GM(C-A)}{2\rho^5}z^2.$$

若令 S, ρ_1, z_1 分别表示太阳的质量，其到地心距离，z 坐标。则地球对日、月两天体的力函数可以写成

$$U=-\frac{3GM(C-A)}{2\rho^5}z^2-\frac{3GS(C-A)}{2\rho_1^5}z_1^2. \qquad (21)$$

至于 z 或 z_1，可用欧拉角 θ, φ, ψ 表示。由(2)式知

$$z=\xi\sin\theta\sin\psi+\eta\sin\theta\cos\psi+\zeta\cos\theta, \qquad (22)$$

其中 (ξ, η, ζ) 为月球(太阳也是一样)对固定坐标系的坐标，与 θ, ψ, φ 无关。由此可見 z 与 φ 无关，只包含 θ, ψ．也就是 U 不显含 φ，因而 $\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$．以 $A=B$，$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$ 代入欧拉方程第三式得

$$C\dot{r}=0,$$

即
$$r=\text{常数}=\omega.$$

亦即：

$$r=\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta=\omega. \tag{23}$$

至于其余两式：由 $A=B$，(8)式成为

$$2T=A(p^2+q^2)+Cr^2.$$

利用(7)式得

$$2T=A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+C(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)^2. \tag{24}$$

按拉格朗日方程列出，由于

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=A\dot{\psi}\sin^2\theta-C\cos\theta(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta),\\
&\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=A\dot{\theta},\\
&\frac{\partial T}{\partial\psi}=0,\\
&\frac{\partial T}{\partial\theta}=A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+C\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta).
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

代入(12)及(15)，并利用(23)得欧拉方程，其余两式为

$$A\ddot{\psi}\sin^2\theta+2A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta+C\omega\sin\theta\dot{\theta}$$
$$-C\cos\theta(\ddot{\varphi}-\ddot{\psi}\cos\theta+\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)=\frac{\partial U}{\partial\psi},$$

$$A\ddot{\theta}-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta-C\omega\dot{\psi}\sin\theta=\frac{\partial U}{\partial\theta}.$$

在后面我們可以看出，$\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ 很小，而 $\ddot{\theta}$, $\ddot{\psi}$, $\dot{\theta}\dot{\psi}$ 更小了。如果把它們略去，则上式簡化成为

$$\dot{\theta}=\frac{1}{C\omega\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}, \tag{26}$$

$$\dot{\psi}=-\frac{1}{C\omega\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}. \tag{27}$$

这就是我們在后面用来[illegible]的基本方程。

§3　地球的慣性轉动，地极移动

討論地球自轉軸相对于 $OXYZ$ 坐标系的运动，应該按欧拉公式解出 p, q, r 为 t 的函数。但在全面考虑之前，我們先来考虑由于 U 的存在，影响究竟有多大。

一、力函数 U 大小的估計

我們先来比較一下 T 与 U 的大小，因欧拉方程中主要是 T 和 U 起作用，而由于 $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ 都很小(与 ω 比較)，可以取(7-2-24)

$$2T=A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+C\omega^2\approx C\omega^2. \tag{1}$$

而由(7-2-21)式知

$$U=-\frac{3(C-A)}{2}\left(GM\frac{z^2}{\rho^5}+GS\frac{z_1^2}{\rho_1^5}\right). \tag{2}$$

設 n_1, a_1 为地球公轉的平均运动和半長徑，則近似地可写

$$GS=n_1^2a_1^3.$$

因此，可以写为

$$\begin{aligned}U&=-\frac{3(C-A)}{2}n_1^2a_1^3\left(\frac{M}{S}\frac{z^2}{\rho^5}+\frac{z_1^2}{\rho_1^5}\right)\\&=-\frac{3}{2}(C-A)n_1^2\Big[\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3\\&\quad+\frac{M}{S}\left(\frac{z}{\rho}\right)^2\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{a_1}{a}\right)^3\Big].\end{aligned} \tag{3}$$

定义

$$K=\frac{3}{2}(C-A)\frac{n_1^2}{C\omega}, \tag{4}$$

$$L=\frac{M}{S}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3, \tag{5}$$

則(3)式成为

$$-\frac{U}{C\omega}=K\left[L\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2+\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3\right]. \tag{6}$$

K, L 为常数，后面再談它們的求法。(6)式是討論岁差章动中用到的 U。

下面来較近似地估計 U 的数值。由于 XY 平面可看作赤道面，則有 $z=\rho\sin\delta$，$z_1=\rho_1\sin\delta_1$；其中 δ，δ_1 为月球和太阳的赤緯。若略去地球和月球軌道的偏心率，則可令 $\rho=a$，$\rho_1=a_1$，即(2)式可写为

$$U=-\frac{3}{2}(C-A)\left(GM\frac{\sin^2\delta}{a^3}+GS\frac{\sin^2\delta_1}{a_1^3}\right).$$

而 δ，δ_1 最大为 $29°$ 和 $23°.5$；故 $\sin\delta$，$\sin\delta_1$ 最大为 0.5 和 0.4。又令 $G(M+E)=a^3n^2$，$GS=a_1^3n_1^2$，故

$$|U|\leqslant\frac{3}{2}(C-A)\left(\frac{1}{2^2}\frac{M}{E+M}n^2+\frac{2^2}{5^2}n_1^2\right)$$

$$<\frac{3}{2}(C-A)\left[\frac{1}{2^2}\left(\frac{M}{E}\right)n^2+n_1^2\right].$$

利用(1)得

$$\frac{|U|}{T}<\frac{3(C-A)}{C}\left(\frac{n_1}{\omega}\right)^2\left[1+\frac{1}{4}\frac{M}{E}\left(\frac{n}{n_1}\right)^2\right]. \tag{7}$$

而其中几个量的近似数值已由观测确定：

$$\frac{C-A}{C}\approx\frac{1}{304},\quad \frac{M}{E}\approx\frac{1}{81};$$

而 $\frac{n_1}{\omega}\approx\frac{1}{366\frac{1}{4}}$ $\left(\omega\text{ 为 }2\pi\frac{1}{\text{恒星日}},\ n_1\text{ 为 }\frac{2\pi}{366\frac{1}{4}}\text{恒星日}\right)$；而 $\frac{n}{n_1}\approx13$（一年与恒星月之比）。代入(7)式得

$$\frac{U}{T}<1.5\times10^{-7}. \tag{8}$$

这个数量很小，因此在考慮地球自轉軸在地球体內微小的变化时，可以略去 U，也就是說不考慮外力对地球自轉的影响，純粹是惯性运动。下面先推出較一般的結果，再来具体考慮地球的情形。

二、剛体的慣性运动

若在欧拉方程中令 $U=0$，則得

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p}-(B-C)qr&=0,\\ B\dot{q}-(C-A)rp&=0,\\ C\dot{r}-(A-B)pq&=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

将三式分别乘以 p，q，r 相加得

$$Ap\dot{p}+Bq\dot{q}+Cr\dot{r}=0.$$

积分得

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=2h\text{（常数）。} \tag{10}$$

若(9)中三式分别乘以 Ap，Bq，Cr 后相加得

$$A^2p\dot{p}+B^2q\dot{q}+C^2r\dot{r}=0,$$

即

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2\text{（常数）。} \tag{11}$$

这就是剛体因慣性运动的两个积分；h，G^2 为积分常数。(10)式的意义很清楚，即动能 $T=h$ 为常数。至于(11)式，也可以有力学的意义：設 (u, v, w) 为剛体内任一点的綫速度在 XYZ 軸上的分量；根据欧拉公式有 $u=qz-ry$，$v=rx-pz$，$w=py-qx$。設此点的质量为 dm，坐标为 (x, y, z)，則此点的动量矩在 X 軸上投影为

$$\begin{aligned}(yw-zv)\,dm&=[y(py-qx)-z(rx-pz)]\,dm\\ &=[p(y^2+z^2)-qxy-rxz]\,dm.\end{aligned}$$

整个剛体的总动量矩在 X 軸上的投影为

$$\begin{aligned}\iiint(yw-zv)\,dm=p\iiint(y^2+z^2)\,dm-q\iiint xy\,dm\\ -r\iiint xz\,dm=Ap.\end{aligned} \tag{12}$$

这是因 X，Y，Z 軸为慣性主軸，所以有

$$\iiint xy\,dm=\iiint xz\,dm=0.$$

同理，总动量矩在 Y，Z 軸上的投影应为 Bq，Cr，则总动量矩大小的平方为

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2.$$

故 G 即为总动量矩大小，亦即 (11) 式表示：刚体轉动的总动量矩是守恒。

有了 (10)，(11) 两个积分就可以很容易解出方程(9)。設 A，B，C 的大小关系为 $A<B<C$；在(10)，(11) 中消去 r 得

$$A(C-A)p^2+B(C-B)q^2=2Ch-G^2;$$

消去 p 得

$$B(B-A)q^2+C(C-A)r^2=G^2-2Ah. \tag{13}$$

由于 $A<B<C$，故 $2Ch-G^2>0$，$G^2-2Ah>0$。

即

$$2Ah<G^2<2Ch, \quad A<\frac{G^2}{2h}<C. \tag{14}$$

引入下列輔助量：

$$\left.\begin{aligned} &a=\sqrt{\frac{C-B}{A}},\quad b=\sqrt{\frac{C-A}{B}},\quad c=\sqrt{\frac{B-A}{C}},\\ &\omega_0=\sqrt{\frac{G^2-2Ah}{C(C-A)}},\quad \sigma=\sqrt{\frac{C}{C-B}\,\frac{2Ch-G^2}{G^2-2Ah}}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

这些輔助量应有下列关系：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A}{1-b^2}=\frac{B}{1-a^2}=\frac{C}{1-a^2b^2},\\ &c^2=\frac{b^2-a^2}{1-a^2b^2},\\ &G^2=\omega_0^2(C^2+A^2a^2\sigma^2),\\ &2h=\omega_0^2(C+Aa^2\sigma^2). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

以(15)式代入(13)式得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=\sigma^2\omega_0^2,\\ &\frac{c^2}{b^2}q^2+r^2=\omega_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

如再引入一个輔助变量 χ:

$$\left.\begin{aligned} p &= a\sigma\omega_0\cos\chi, \\ q &= b\sigma\omega_0\sin\chi, \\ r &= \omega_0\sqrt{1-c^2\sigma^2\sin^2\chi}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

則(18)式的結果显然为(17)式的解,只要求出 χ 就行了。

以(18)式代入(9)式中任何一个,例如第三式,則得

$$\frac{d\chi}{dt} = ab\omega_0\sqrt{1-c^2\sigma^2\sin^2\chi},$$

即 χ 定义为

$$ab\omega_0(t+\tau) = \int_0^{\chi}\frac{d\chi}{\sqrt{1-c^2\sigma^2\sin^2\chi}}. \tag{19}$$

这是个椭圓积分,以 $c\sigma$ 为模,τ 为新的积分常数。对任何一时刻 t 可查椭圓函数表找出相应的 χ. 故 (18),(19) 式就是剛体慣性运动方程 (9) 的解。知道了 p, q, r, 剛体的瞬时自轉軸方向就定了。至于角速度 ω 的大小,可由

$$\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2} = \omega_0\sqrt{1+a^2\sigma^2-a^2b^2c^2\sigma^2\sin^2\chi} \tag{20}$$

求出。这里求出的瞬时自轉軸方向是对 $OXYZ$ 坐标系而言,也就是瞬时自轉軸在剛体内部的变化規律。至于它对固定坐标系的运动,应求出 θ, φ, ψ 为 t 的函数。按上面結果也不难求出,这里不去求它,在后面考虑 U 的情况时去求。

三、班索定理

根据上面所得結果,下面証明两个重要定理,称为班索 (Poinsot) 定理。

定理 1 剛体轉动的角速度与 ON 成正比,O 为定点,N 为瞬时軸与慣性椭球面之交点。

証 取三个坐标軸与慣性主軸重合;N 点的坐标为 (ξ,η,ζ). 令 $ON=\rho$; 瞬时角速度 ω 在三坐标軸上投影为 (p, q, r). 由于角速度 ω 就在 ON 方向(瞬时轉軸),因此可认为 $\vec{ON}$ 与 $\vec{\rho}$ 为同一

方向的向量，(ξ, η, ζ) 和 (p, q, r) 为它們的投影。按投影定律知：

$$\frac{\xi}{p}=\frac{\eta}{q}=\frac{\zeta}{r}=\frac{\rho}{\omega}. \tag{21}$$

而 $N(\xi, \eta, \zeta)$ 点在惯性椭球面上，故应满足惯性椭球面方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1.$$

以(21)中的 (ξ, η, ζ) 代入得

$$\frac{\rho^2}{\omega^2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=1.$$

而由前面知 $Ap^2+Bq^2+Cr^2=h$（常数），故上式为

$$\frac{\rho^2}{\omega^2}h=1,$$

即

$$\omega=\rho\sqrt{h}. \tag{22}$$

这就是要証明的結果。

定理2 由定点 O 至 N 点在惯性椭球面上切平面的距离为常数。

証 首先求出此切平面的方向。由于惯性椭球面方程为

$$f(x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2-1=0.$$

由几何学知識知，在 $N(\xi, \eta, \zeta)$ 点的切平面的法綫的方向余弦为

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

由于 N 点坐标为 (ξ, η, ζ)，即为

$$\frac{A\xi}{\sqrt{A^2\xi^2+B^2\eta^2+C^2\zeta^2}},$$

$$\frac{B\eta}{\sqrt{A^2\xi^2+B^2\eta^2+C^2\zeta^2}},$$

$$\frac{C\zeta}{\sqrt{A^2\xi^2+B^2\eta^2+C^2\zeta^2}}.$$

用(21)式代入得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}},\\&\frac{Bq}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}},\\&\frac{Cr}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

而由(11)式和后面的說明知，这就是总动量矩的方向余弦。可写为

$$\left(\frac{Ap}{G},\ \frac{Bq}{G},\ \frac{Cr}{G}\right) \tag{24}$$

其中 G 即总动量矩，为常数。

設 O 至 N 点切平面的距离为 d，并設 d 与 ρ 之間交角为 θ，則 $d=\rho\cos\theta$，而 $\cos\theta$ 可由 d 和 ρ 的方向余弦求出，即［利用 (21)，(24) 式］：

$$d=\rho\cos\theta=\rho\left(\frac{p}{\omega}\,\frac{Ap}{G}+\frac{q}{\omega}\,\frac{Bq}{G}+\frac{r}{\omega}\,\frac{Cr}{G}\right)$$

$$=\frac{\rho}{\omega G}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=\frac{\rho h}{\omega G}.$$

以(22)式代入得：

$$d=\frac{\sqrt{h}}{G}=\text{常数}。 \tag{25}$$

从上面两个定理和前面的討論，我們可以对剛体（有定点）的

慣性运动有些了解，特别是定理 2。由于这里的运动不考虑外力，應該是保守体系，故总动量矩的大小及在空間的方向應該是不变的；也就是說，N 点（瞬时轉軸与慣性楕球交点）在慣性楕球面上的切平面方向在空間是不变的。再根据定理 2，O 点到它的距离也不变，故此切平面在空間的位置和方向都是固定了。根据这些我們可以把有固定点的剛体慣性运动描述如下：存在一固定平面 L，剛体轉动时，慣性楕球面始終与 L 相切，轉动角速度与 O 点到切点 N 的距离成正比，瞬时轉軸与 ON 相合。

四、地球的慣性轉动，地极移动

根据上面的討論，我們現在可以具体研究地球慣性轉动。对于瞬时自轉軸在空間的运动，这里不予討論；只討論地球自轉运动中，地軸在地球体內的运动和自轉角速度的变化。

在地球情况中，令 $A=B$，則 $a=b$，$c=0$，于是 (18) 和 (20) 式成为

$$p=a\sigma\omega_0\cos\chi,\quad q=a\sigma\omega_0\sin\chi,\quad r=\omega_0; \tag{26}$$

$$\omega=\omega_0\sqrt{1+a^2\sigma^2}. \tag{27}$$

由 (27) 式立刻可知，ω 为常数。也就是說，如果沒有其他影响，只是慣性运动，地球自轉角速度的大小應該为常数。这就說明了为什么要用地球自轉作为計算时間的标准。ω 与它在 z 軸上的投影 ω_0 相差很小，根据观測值估計，$a^2\sigma^2<10^{-11}$。

如果考虑日月的影响，地球自轉角速度仍然为常数（不考虑潮汐作用）。但若地球的慣性楕球不是旋轉楕球，$A\neq B$，$c\neq 0$，則地球自轉速度需要作微小修正，可是不存在長期項。除 ω_0 大小改正一点外，还有許多周期項，系数很小，总和不超过 $0''.0001$。因此，如略去这些周期項，地球自轉角速度大小仍然可认为是常数，还是可以作为时間的基本单位。

至于 (26) 式，說明 p，q 为周期函数，振幅很小，亦即地球自轉

軸方向在繞 z 軸作周期轉动。設 P_0 为 z 軸在地面的交点，作为平均地极，瞬时軸在地面交点为 P，称为瞬时极，則它就在地面上繞 P_0 运动。由于 $a\sigma$ 很小，可以把 P_0 附近看作平面与 x-y 平面平行，則 P 点位置可用 (x, y) 表示。根据(26)式，P 点坐标可表为（以 z 軸方向的地球半徑为長度单位）

$$x=\frac{p}{\omega_0}=a\sigma\cos\chi, \quad y=\frac{q}{\omega_0}=a\sigma\sin\chi. \tag{28}$$

至于 χ，根据(19)式，令 $c=0$，$a=b$ 得

$$\chi=a^2\omega_0(t+\tau)-a^2\omega_0 t+\beta. \tag{29}$$

代入(28)式得

$$x=a\sigma\cos(a^2\omega_0 t+\beta), \quad y=a\sigma\sin(a^2\omega_0 t+\beta). \tag{30}$$

由(30)式可知，P 点繞 P_0 作圓周运动，半徑为 $a\sigma$，周期为

$$T=\frac{2\pi}{a^2\omega_0}=\frac{A}{C-A}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{31}$$

但 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 可看作是一个恒星日，而 $\frac{A}{C-A}\approx 303$，即 P 的周期为303恒星日或 302 平太阳日。这个周期称为欧拉周期。

如果考虑日、月影响，(30)式可近似地写作

$$\left.\begin{aligned} x&=a\sigma\cos(a^2\omega_0 t+\beta)+\lambda_1\cos L_1,\\ y&=a\sigma\sin(a^2\omega_0 t+\beta)+\lambda_1\sin L_1. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

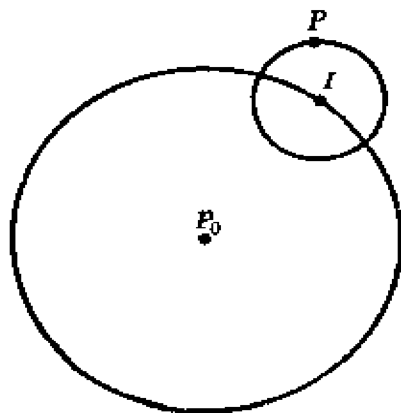


图 26

其中 λ_1 为比 $a\sigma$ 更小的量，根据观测結果可知，L_1 的周期接近一个恒星日。由实际观测近似地写出其数值为 $a\sigma\approx 15$ 米，$\lambda_1=0.6$ 米。因此地极移动可視为如图 26 中 I 繞 P_0 轉动，周期約 10 个月（302 天），P 繞 I 轉动，周期为 1 天，$P_0I=15$ 米，$PI=0.6$ 米。

上面的考虑是把地球作为剛体，P_0

认为在地面上不变。实际上，地球不是刚体，地面上 71% 的面积是水，还有各种气象因素。地球的固体部分也不是严格的刚体。地球本身质量分布的变化，会引起 P_0 改变位置，同时也会使地球自轉角速度改变。根据計算，如果整个亚洲向南漂移 10°，則 P_0 向亚洲中心方向移 5 公里（約 245″）。若地球内某一部分质量有东西方向移动或上下移动，則不但引起地极移动，而且还引起地球自轉速度的改变。海水潮汐是使地球自轉角速度变化的最大因素，估計約使恒星日在百年内增长 $\frac{1}{1000}$ 秒。由于地球内部质量分布不断改变，地极移动变得非常复杂；而且发現有长期变化趋势，这些現象正通过緯度变化的观測来进行深入的研究。根据 19 世紀末和 20 世紀初期的观測資料分析，錢德納（Chandler）发現地极有二种周期运动：一种周期是一年，振幅很小；另一种周期为 14 个月，振幅約 0″.2。前一种估計主要是地球物理因素的影响，后一种应該是欧拉周期，只是因地球不是剛体，数值有所改变。

§4 力函数 U 的展开

下面要具体討論地极在空間的运动。需要考虑 U 的影响，先要展开 U 为时間 t 和 ψ, θ 的明显函数。

根据(7-3-6)式知

$$U=-C\omega K\left[L\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2+\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3\right].$$

其中 z, a, ρ 分别为月球的坐标、軌道半长徑和地心距；z_1, a_1, ρ_1 分别为相应于太阳的量。而由 §2 知

$$z=\xi\sin\theta\sin\psi+\eta\sin\theta\cos\psi+\zeta\cos\theta.$$

(ξ, η, ζ) 为月球对于固定坐标系 $OX_0Y_0Z_0$ 的坐标。对太阳的 z_1 也完全相同。

只要得到对月亮的展开式，太阳的情形可照样写出。

在图 27 中，以地球质量中心为天球中心，$X_0Y_0Z_0$ 为固定坐标軸(卽某历元 t_0 时的黄道坐标系)，大圓 ACE 为討論时刻 t 时的黄道；K 是它的极；i 为两个不同时刻 t 和 t_0 时的黄道之間的交角 BCM 为时刻 t 时的月球軌道，M 表示此时的月球位置；C 为月球軌道对 t 时黄道的升交点，c_1 为傾角(約 $5°8'$)。

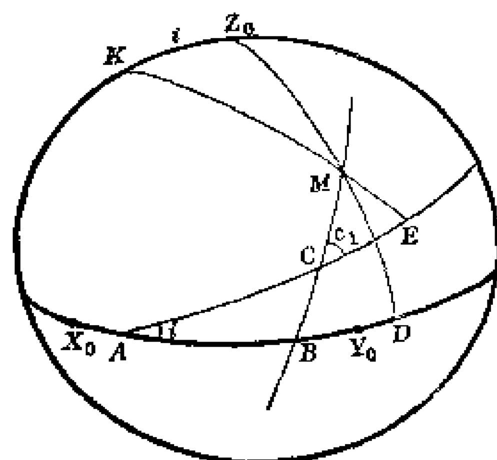


图 27

要展开上式，主要要展开 $\left(\frac{a}{\rho}\right)^3$ 和 $\left(\frac{z}{\rho}\right)^2$。由

$$\frac{z}{\rho}=\frac{\xi}{\rho}\sin\theta\sin\psi+\frac{\eta}{\rho}\sin\theta\cos\psi+\frac{\zeta}{\rho}\cos\theta. \tag{1}$$

令 $X_0D=L$, $MD=B$；由直角坐标和球坐标关系知

$$\xi=\rho\cos L\cos B,\quad \eta=\rho\sin L\cos B,\quad \zeta=\rho\sin B.$$

代入(1)式得

$$\frac{z}{\rho}=\cos B\sin\theta\sin(L+\psi)+\sin B\cos\theta. \tag{2}$$

L, B 为时間 t 的函数，但还不是 t 的明显函数。下面逐步把它們化为时間 t 和軌道根数的函数。

令 $X_0A+AE=l$, $EM=b$。則 b 为黄緯，l 为黄經(还差一个常数)。則在球面三角形 KZ_0M 中，$KZ_0=i$, $Z_0M=90°-B$, $KM=90°-b$, $\angle KZ_0M$ 为 $90°+L-\Omega$ (此处 $X_0A=\Omega$)，

$$\angle Z_0KM=90°-(l-\Omega).$$

于是从球面三角公式可得

$$\left.\begin{aligned}&\sin B=\sin b\cos i+\cos b\sin i\sin(l-\Omega),\\&\cos B\sin(L-\Omega)=-\sin b\sin i+\cos b\cos i\sin(l-\Omega),\\&\cos B\cos(L-\Omega)=\cos b\cos(l-\Omega).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

再令 $X_0A+AC=N$, $N+CM=v$。则由球面三角形 MCE 知，$MC=v-N$, $ME=b$, $CE=l-N$, $\angle MCE=c_1$, $\angle MEC=90^\circ$。则得

$$
\left.\begin{aligned}
&\cos(v-N)=\cos b\cos(l-N),\\
&\cos c_1\sin(v-N)=\cos b\sin(l-N),\\
&\sin c_1\sin(v-N)=\sin b.
\end{aligned}\right\}\tag{4}
$$

在(2)式中把 $L+\psi=(L-\Omega)+(\psi+\Omega)$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{\rho}=&\sin\theta\cos(\psi+\Omega)[\cos B\sin(L-\Omega)]\\
&+\sin(\psi+\Omega)\sin\theta[\cos B\cos(L-\Omega)]\\
&+\cos\theta[\sin B].
\end{aligned}\tag{5}
$$

方括弧中的量可用(3)式代入。由于 i 很小(与 $t-t_0$ 成正比，每年为 $18''$)。可以令 $\sin i=i$, $\cos i=1$。于是在(3)式中的第二式为

$$
\begin{aligned}
\cos B\sin(L-\Omega)&=-i\sin b+\cos b\sin(l-\Omega)\\
&=-i\sin b+\cos b\sin[(l-N)+(N-\Omega)]\\
&=-i\sin b+\cos b\sin(l-N)\cos(N-\Omega)\\
&\qquad+\cos b\cos(l-N)\sin(N-\Omega).
\end{aligned}
$$

以(4)式代入得

$$
\begin{aligned}
\cos B\sin(L-\Omega)=&-i\sin c_1\sin(v-N)\\
&+\cos c_1\sin(v-N)\cos(N-\Omega)\\
&+\cos(v-N)\sin(N-\Omega).
\end{aligned}
$$

又由于 c_1 不大(約为 $5^\circ\!.2$)，$\sin c_1$ 小于 0.1，而这里用的位数不多，可略去 $i\sin c_1$，令 $S=\sin c_1$，$\cos c_1=1-\frac{S^2}{2}$，则上式可近似地写为

$$\left.\begin{aligned}
\cos B\sin(L-\Omega) &= \left(1-\frac{1}{4}S^2\right)\sin(v-\Omega)\\
&\qquad -\frac{1}{4}S^2\sin(v-2N+\Omega).\\
&\text{同理可得}\\
\cos B\cos(L-\Omega) &= \left(1-\frac{1}{4}S^2\right)\cos(v-\Omega)\\
&\qquad +\frac{1}{4}S^2\cos(v-2N+\Omega),\\
\sin B &= S\sin(v-N)+i\sin(v-\Omega).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

以(6)式代入(5)式得

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\rho} &= \left(1-\frac{1}{4}S^2\right)\sin\theta\sin(v+\psi)\\
&\quad +S\cos\theta\sin(v-N)+i\cos\theta\sin(v-\Omega)\\
&\quad -\frac{1}{4}S^2\sin\theta\sin(v-2N-\psi).
\end{aligned} \tag{7}$$

由(7)式平方可得 $\frac{z^2}{\rho^2}$，略去 i^2, S^4, iS 等項得

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{\rho^2} &= \frac{1}{2}S^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}S^2\right)\sin^2\theta\\
&\quad -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}S^2\right)\sin^2\theta\cos(2v+2\psi)\\
&\quad -\frac{1}{4}S^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi)\\
&\quad +S\left(1-\frac{1}{2}S^2\right)\sin^2\theta\cos\theta\cos(N+\psi)\\
&\quad +i\sin\theta\cos\theta\cos(\Omega+\psi).
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 v 按定义可写为 $f+\tilde{\omega}$; f 为真近点角，$\tilde{\omega}$ 为月球近地点平均經度。而由于 f 可展开为平近点角 M 的三角級数

$$f=M+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\cdots. \tag{9}$$

至于 $\left(\frac{a}{\rho}\right)^3$，也可展开为

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + 3e\cos M + \frac{9}{2}e^2\cos 2M + \cdots. \tag{10}$$

以(8)，(10) 相乘，令 $v = f + \tilde{\omega}$，并以(9)式代入，略去其中不含 θ，ψ 的项$\left(因后面只需 \frac{\partial U}{\partial \theta}，\frac{\partial U}{\partial \psi}\right)$，只算到 e^2 项得

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right) = &\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}S^2\right)\sin^2\theta \\ &+ S\left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right)\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi) \\ &- \frac{1}{4}S^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi) \\ &+ i\sin\theta\cos\theta\cos(\Omega+\psi) + \frac{3}{2}e\sin^2\theta\cos M \\ &- \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi) + \cdots.\end{aligned} \tag{11}$$

此式对太阳的情况也完全适用，只是 $S = \sin c_1 = 0$。因此若用 M_1，$\tilde{\omega}_1$，e_1 表示地球轨道中相应的量，则 $\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2$ 的展开式与 (11) 完全相同，只是 $S = 0$，M，e，$\tilde{\omega}$ 换为 M_1，e_1，$\tilde{\omega}_1$。因此，根据 (7-3-6) 式得

$$\begin{aligned}-\frac{U}{C\omega} &= K\left[L\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2\right] \\ &= K\left\{\left[L\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}S^2\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}e_1^2\right]\sin^2\theta\right. \\ &\quad + LS\left(1 - \frac{1}{2}S^2 + \frac{3}{4}e^2\right)\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi) \\ &\quad - \frac{1}{4}LS^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi) \\ &\quad - \frac{1}{2}[L\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi)\end{aligned}$$

$$+\cos(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)]\sin^2\theta$$
$$+i(L+1)\cos(\psi+\Omega)\sin\theta\cos\theta$$
$$+\frac{3}{2}(Le\cos M+e_1\cos M_1)\sin^2\theta+\cdots\Big\}. \tag{12}$$

其中 K，L 的定义已在§3中讲过了。

在其中月亮的根数 N，e、S、$\tilde{\omega}$ 等都看作为时間 t 的周期函数，不考虑它的长期变化。地球軌道根数 i，Ω，e_1 等可看作是长期变化(很可能它們是周期变化，但周期太长，在几千年甚至几万年內的长期变化)。根据地球軌道理論，由于受其他行星攝动，可以写为

$$e_1=e_0+e't,\quad i\sin\Omega=gt+ht^2,\quad i\cos\Omega=g_1t+h_1t^2. \tag{13}$$

其中 e'，g，g_1，h，h_1 为非常小的量，在后面略去 e'^2，h，h_1，故

$$i\cos(\psi+\Omega)=\cos\psi(i\cos\Omega)-\sin\psi(i\sin\Omega)$$
$$=(g_1\cos\psi-g\sin\psi)t; \tag{14}$$

$$e_1^2=e_0^2+2e_0e't. \tag{15}$$

代入(12)式。为了使长期項和周期項分开，定义

$$\left.\begin{aligned}F&=K\left[L\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}S^2\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_0^2\right],\\ G&=K(L+1),\\ H&=\frac{3}{2}Ke_0e';\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$V=K\Big\{LS\left(1-\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{4}e^2\right)\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi)$$
$$-\frac{1}{4}LS^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi)$$
$$-\frac{1}{2}[L\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi)$$
$$+\cos(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)]\sin^2\theta$$
$$+\frac{3}{2}(Le\cos M+e_1\cos M_1)\sin^2\theta+\cdots\Big\}. \tag{17}$$

因此

$$-\frac{U}{C\omega}=F\sin^2\theta+[G(g_1\cos\psi-g\sin\psi)\sin\theta\cos\theta$$
$$+H\sin^2\theta]t+V. \tag{18}$$

其中 V 只含周期项。这就是力函数的展开式。

§5 欧拉方程的解

上面已得到力函数的展开式,现在来具体解出欧拉方程:

$$\dot\psi=-\frac{1}{C\omega\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta},\quad \dot\theta=\frac{1}{C\omega\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}. \tag{1}$$

以上节(18)式代入得

$$\dot\psi=2F\cos\theta+\left[G(g_1\cos\psi-g\sin\psi)\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\right.$$
$$\left.+2H\cos\theta\right]t+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}; \tag{2}$$

$$\dot\theta=G\cos\theta(g_1\sin\psi+g\cos\psi)t-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi}. \tag{3}$$

为了使长期项和周期项分开,令

$$\psi=\psi_m+\delta\psi,\quad \theta=\theta_m+\delta\theta \tag{4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\dot\psi_m&=2F\cos\theta+\left[G(g_1\cos\psi-g\sin\psi)\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\right.\\&\qquad\left.+2H\cos\theta\right]t,\\ \dot\theta_m&=G\cos\theta(g_1\sin\psi+g\cos\psi)t;\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\frac{d\delta\psi}{dt}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta},\quad \frac{d\delta\theta}{dt}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi}. \tag{6}$$

由实际观测知道，ψ, θ 的变化很慢 (ψ 要 70 年增加 1°, θ 为微小的周期变化，振幅不超过 15″)，而且在定义 X_0Y_0 时，可取 X_0 很接近于 t_0 时的春分点。于是在相当长的时期内 ψ 是小量。而

(5)式中含 ψ 的項前面还有微小的因子 Gg_1 及 Gg. 因此，在足够精确的情形下，可令 $\sin\psi=0$, $\cos\psi=1$, $\theta=\theta_0$，于是(5)式成为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi}_m&=2F\cos\theta_0+\left(Gg_1\frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0}+2H\cos\theta_0\right)t,\\ \dot{\theta}_m&=Gg\cos\theta_0 t.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

积分后可得

$$\psi_m=\psi_0+at+bt^2,\quad \theta_m=\theta_0+ct^2.\tag{8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a&=2F\cos\theta_0,\quad c=\frac{1}{2}Gg\cos\theta_0,\\ b&=\frac{1}{2}\left(Gg_1\frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0}+2H\cos\theta_0\right).\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

至于解(6)式，以(7-4-17)式中的 V 代入(6)式，对 ψ 及 θ 求微商后，令 $\theta=\theta_0$，则得

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\psi}{dt}=&KLS\left(1-\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}e^2\right)\frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0}\cos(N+\psi)\\ &-K\cos\theta_0\Big[\frac{1}{2}S^2L\cos(2N+2\psi)\\ &+L\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi)+\cos(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)\\ &-3(Le\cos M+e_1\cos M_1)+\cdots;\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\theta}{dt}=&KLS\left(1-\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}e^2\right)\cos\theta_0\sin(N+\psi)\\ &-K\sin\theta_0\Big[\frac{1}{2}LS^2\sin(2N+2\psi)\\ &+L\sin(2M+2\tilde{\omega}+2\psi)\\ &+\sin(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)+\cdots.\end{aligned}\tag{11}$$

在上式中除 N, ψ, M, M_1 外，其余都可看作常数。M, M_1 很简单可写为 $nt+M_0$ 与 n_1t+M_{10}; ψ 可用 ψ_0+at 表示(略去 b)，N 为月球軌道升交点經度，有长期变化 (18.6 年减少 360°)。令 $N=N_0-N't$ 可得

$$N+\psi=\beta-\alpha t,\ \ \beta=N_0+\psi_0,\ \ \alpha=N'-a. \tag{12}$$

由于 a 比 n, n_1 小許多倍，故在积分时，凡是 ψ 与 M 或 M_1 在一起，只考虑 M 和 M_1。于是(11)，(12)很容易积分。为簡單起見，定义

$$\alpha D=KLS\left(1-\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}e^2\right)\frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0}; \tag{13}$$

$$\alpha E=KLS\left(1-\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}e^2\right)\cos\theta_0. \tag{14}$$

故积分后得(积分常数归并到 ψ_0, θ_0 中)

$$\begin{aligned}\delta\psi=&-D\sin(N+\psi)+K\cos\theta_0\Big[\frac{LS^2}{4\alpha}\sin(2N+2\psi)\\&-\frac{L}{2n}\sin(2M+2\tilde{\omega}+2\psi)\\&-\frac{1}{2n_1}\sin(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)\\&+3\left(\frac{Le}{n}\sin M+\frac{e_1}{n_1}\sin M_1\right)\Big]+\cdots;\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\delta\theta=&E\cos(N+\psi)-K\sin\theta_0\Big[\frac{LS^2}{4\alpha}\cos(2N+2\psi)\\&-\frac{L}{2n}\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi)\\&-\frac{1}{2n_1}\cos(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)\Big]+\cdots.\end{aligned} \tag{16}$$

在 $\psi=\psi_m+\delta\psi$, $\theta=\theta_m+\delta\theta$ 中，ψ_m, θ_m 为長期項，称为日月岁差項；$\delta\psi$, $\delta\theta$ 为周期項，称为章动項。根据(8)，(15)，(16)可得到任意 t 时的 ψ, θ 值。根据它們就可以定出此时的赤道和春分点的位置。

如果只考虑 ψ_m, θ_m，略去 $\delta\theta$, $\delta\psi$，則相应的春分点和赤道称为平春分点和平赤道。由于 $\psi_m=\psi_0+at+bt^2$，如果把 X_0 取作 $t=0$ 时的春分点，則 $\psi_0=0$，于是 $\psi_m=at+bt^2$。

§6 日月岁差和行星岁差

如图 28 所示，設 $t=0$ 时，春分点在 X_0. NX_0A 为 $t=0$ 时的黄道位置；NN' 为 t 时的赤道（只考虑岁差），$N'D\perp NX_0$，$N'A$ 为 t 时的黄道位置。在这节中，我們只考虑岁差，故下面所提的 ψ, θ 都表示 ψ_m, θ_m.

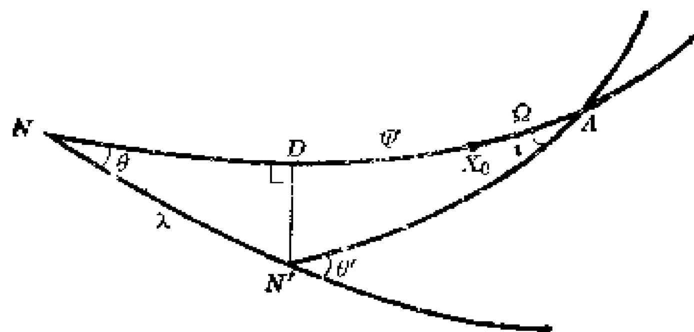


图 28

根据上面所述，$NX_0=\psi$；$\angle N'NX_0=\theta$. θ 是 t 时的赤道对 $t=0$ 时的黄道的傾角；θ' 是 t 时的赤道对 t 时的黄道的傾角；$X_0A=\Omega$, i 为傾角。根据前面所述，由于行星攝动

$$\left.\begin{aligned} i\sin\Omega &= gt+ht^2,\\ i\cos\Omega &= g_1t+h_1t^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

从上面可知，如果設有行星攝动，則 t 时的春分点在 N 点；黄赤交角为 θ. 由于行星攝动，春分点应移到 N'；黄赤交角应为 θ'. 現在来求出 $NN'=\lambda$, θ' 以及实际春分点 N' 在 $t=0$ 时黄道上的位移 ψ'.

首先在球面三角形 $NN'A$ 中，根据以角度为标准的余弦公式得

$$\cos\theta'=\cos\theta\cos i-\sin\theta\sin i\cos(\Omega+\psi).$$

令 $\theta'=\theta+\Delta\theta$，如只准确到二阶小量[取到 $(\Delta\theta)^2$ 和 i^2]，則上式为

$$\left(1-\frac{1}{2}(\Delta\theta)^2\right)\cos\theta-\Delta\theta\sin\theta$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}i^2\right)\cos\theta-i\sin\theta\cos(\Omega+\psi).$$

如只取到一阶小量则

$$\Delta\theta=i\cos(\Omega+\psi); \tag{2}$$

取到二阶小量，则为

$$\Delta\theta=i\cos(\Omega+\psi)+\frac{1}{2}i^2\operatorname{ctg}\theta\sin^2(\Omega+\psi). \tag{3}$$

以 $\psi=at+bt^2$, $\theta=\theta_0+ct^2$, 及(1)式代入(3)，如只取到 t^2 项，则得

$$\Delta\theta=g_1t+\left(h_1-ag+\frac{1}{2}g^2\operatorname{ctg}\theta_0\right)t^2. \tag{4}$$

于是

$$\theta'=\theta+\Delta\theta=\theta_0+Qt+Q_1t^2. \tag{5}$$

其中

$$Q=g_1,\quad Q_1=c+h_1-ag+\frac{1}{2}g^2\operatorname{ctg}\theta_0. \tag{6}$$

其次，在球面三角形 $NN'D$ 中，在 D 处为直角，

$$NN'=\lambda,\quad DN=\psi-\psi',$$

则有

$$\operatorname{tg}(\psi-\psi')=\operatorname{tg}\lambda\cos\theta.$$

而 $\psi-\psi'$, λ 都是小量。如只准确到二阶小量，则可写为

$$\psi-\psi'=\lambda\cos\theta=\sin\lambda\cos\theta_0. \tag{7}$$

但从球面三角形 NAN' 中，由于 $NA=\Omega+\psi$，用正弦定律可知

$$\sin\lambda=\frac{\sin i\sin(\Omega+\psi)}{\sin\theta'}=\frac{i\sin(\Omega+\psi)}{\sin\theta'}. \tag{8}$$

因 i 是小量，故 $\sin\theta'$ 只准确到一阶小量就行了，即

$$\sin\theta'=\sin(\theta+\Delta\theta)=\sin\theta[1+\operatorname{ctg}\theta_0\, i\cos(\Omega+\psi)]. \tag{9}$$

以(9)式代入(8)后再代入(7)，令 $\theta=\theta_0$，则得

$$\psi-\psi'=i\sin(\Omega+\psi)\operatorname{ctg}\theta_0$$

$$-i^2\sin(\Omega+\psi)\cos(\Omega+\psi)\operatorname{ctg}^2\theta_0. \tag{10}$$

以(1)代入，只限制到 t^2（$\psi=at$ 就行了，因 i 含有 t）：

$$\psi-\psi'=(gt+ht^2+ag_1t^2)\operatorname{ctg}\theta_0-gg_1t^2\operatorname{ctg}^2\theta_0. \tag{11}$$

以 $\psi=at+bt^2$ 代入則得

$$\psi'=Pt+P_1t^2; \tag{12}$$

其中

$$P=a-g\operatorname{ctg}\theta_0,\quad P_1=b-(h+ag_1)\operatorname{ctg}\theta_0+gg_1\operatorname{ctg}^2\theta_0. \tag{13}$$

(5) 和 (12) 式定义的 ψ' 和 θ' 就是考慮日月和行星的全部影响，称为黄經和黄赤交角的总岁差。

由于行星攝动使春分点由 N 移动到 N'，則天体赤經相应要減小 $NN'=\lambda$。由(7)式和(11)式知

$$\begin{aligned}\lambda=(\psi-\psi')\sec\theta_0&=(gt+ht^2+ag_1t^2)\csc\theta_0\\&-gg_1t^2\operatorname{ctg}\theta_0\csc\theta_0=\lambda't+\lambda''t^2.\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\lambda'=g\csc\theta_0,\quad \lambda''=(h+ag_1-gg_1\operatorname{ctg}\theta_0)\csc\theta_0. \tag{15}$$

在习慣上把 λ 称为行星岁差，为天体赤經的改正量。

§7 章动椭圓

上节已討論了岁差；作了岁差改正的春分点和赤道称为平春分点和平赤道，相应的天极也称为平天极。但 ψ 和 θ 还有章动項改正 $\delta\psi$ 和 $\delta\theta$，加上章动改正得到的春分点、赤道和天极称为眞春分点、眞赤道和眞天极。章动改正中主要項应为含 $N+\psi$ 的項，因为它的周期最长(卽与月球交点周期相近，約 18.6 年)，而且与观測发現的眞天极周期相同。因此，章动改正可近似地认为：

$$\delta\psi=-D\sin(N+\psi),\quad \delta\theta=E\cos(N+\psi). \tag{1}$$

如图 29 所示，設 Z_0 为黄极；P_0 为 t 时的平天极；P 为眞天极。联結大圓 Z_0P_0，Z_0P，并由 P 作垂直大圓 $PB\perp P_0Z_0$。由于 P，P_0 非常接近，可认为 Z_0P 等于 Z_0B，亦卽 $\delta\theta=P_0B$。$\delta\psi$ 应为

$\angle PZ_0P_0$。可近似地认为 $PB=\delta\psi\sin\theta=\delta\psi\sin\theta_0$。由于 P, P_0 相距很近，在 P_0 附近的天球可认为是平面。以 P_0 为原点，以 Z_0P_0 方向作 x 轴，以垂直方向作 y 轴，则 P 对 P_0 的坐标应为

$$x=\delta\theta,$$
$$y=\delta\psi\sin\theta_0;$$

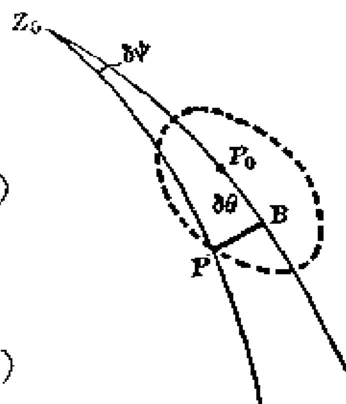


图 29

即

$$\left.\begin{aligned} x&=E\cos(N+\psi),\\ y&=D\sin(N+\psi)\sin\theta_0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

由此可得

$$\frac{x^2}{E^2}+\frac{y^2}{D^2\sin^2\theta_0}=1.\qquad(3)$$

說明 P 对 P_0 相动运动的軌迹为一个椭圓，称章动椭圓。椭圓的二半徑为 E 和 $D\sin\theta_0$。按照 (7-5-13), (7-5-14) 式中 D, E 的定义知

$$D\sin\theta_0=\frac{E\cos 2\theta_0}{\cos\theta_0}<E.$$

因为 θ_0 近于 23°.5，故 $\cos 2\theta_0<\cos\theta_0$，于是 E 为椭圓的半长徑，可以从大量的观測用統計方法得到。

§8 系数的确定

关于岁差和章动的公式已在前面几节得出，其中系数以及一些积分常数还不知道。地球和月球的軌道根数，可根据天体力学中关于它們的运动理論求出，还有一些量要从观測值才能定出来。

岁差常数 p（包括 p_1）、章动常数 E 和 $t=0$ 时的 θ_0，是天文学中的基本常数，要用观測方法测定。

測定岁差常数需要观測恒星长期的位置变化。由于恒星有自行，必須加以改正。恒星自行又分为三类：(1)恒星本身的不規則

运动，(2)由于太阳在銀河系内运动的相对运动，(3)銀河系的自轉，故問題变得非常复杂。因此，不但要恒星的长期观测，还要用大量的恒星才行。最早定出較准确岁差值的是白塞耳(Bessel)，他是比較了布拉德雷(Bradley)和皮阿齐的星表中 2200 个星得到。后来由斯特魯維和彼得斯(Петерс)考虑了太阳在銀河系内运动的改正，重新得到岁差常数值。直到 19 世紀末，紐康整理了前人的結果，提出一組岁差常数。在 1896 年，紐康第二次比較了 2527 个恒星的历年观测，得到岁差常数为(历元为 1900 年 1 月 0 日格林尼治平中午)：

$$p = 5025''.64, \qquad p_1 = 0''.011,$$
$$a = 5037''.08, \qquad b = 0''.0025,$$
$$\psi' = pt + p_1t^2, \qquad \psi_m = at + bt^2.$$

其中 t 是以 1900 年 1 月 0 日格林尼治平中午起算的时間，以儒略世紀为单位(36525 日)。这組数值被国际上采納，直到现在还是以它們为計算岁差的公式。相应的 θ' 公式为(同一历元)：

$$\theta' = \theta_0 + Qt + Q_1t^2, \qquad \theta_0 = 23°27'08''.26,$$
$$Q = -46''.84, \qquad Q_1 = -0''.0035.$$

t 的定义同上。相应的其他数值如下(历元和 t 的定义相同)：

$$\lambda = \lambda't + \lambda''t^2, \quad \lambda' = 0''.1248, \quad \lambda'' = -0''.0095,$$
$$i\sin\Omega = g + ht^2, \quad i\cos\Omega = g_1t + h_1t^2,$$
$$g = 4''.584, \qquad h = 0''.1955,$$
$$g_1 = -46''.84, \quad h_1 = 0''.00533,$$
$$c_1 = 5°8'43''.427, \quad e = 0.054900, \quad \sin c_1 = S,$$
$$e_1 = e_0 + e't, \quad e_0 = 0.016751, \quad e_1 = -0.0000418.$$

在紐康的結果中，未考虑銀河系自轉的改正。在 20 世紀以后，由奥尔特、費森柯夫、奥果尔德尼可夫(Огородников)、巴利斯基(Парийский)等研究銀河系自轉結果，认为紐康的岁差常数 a 每百年

要改正0″.01。另外也有人計算过，由于地球本身在太阳引力場内运动，应作相对論改正，使 a 要增加1″.92。这些数字均未正式采納。

至于章动常数 E，在1896年，国际天文学会同意紐康根据前人的工作提出的数值，即 $E=9''.2100$。测定 E 需要利用拱极星的长期观測，至少要观測19年（章动周期）。再研究观測到的眞天极与計算出的平天极相对位置，用統計方法定出 E。为此工作，普耳科伐天文台曾在1904～1941年内对400多顆星体作了45000多次观測。

根据 E 和 a，θ_0，从

$$Ea=KLS\left(1-\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}e^2\right)\cos\theta_0,$$

$$a=2I\cos\theta_0$$

$$=2K\left[L\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^2S^2\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_0^2\right]\cos\theta_0,$$

可求出 KL 和 K。其中除 α 外都为已知量。α 可由月球运动理論知

$$\alpha=0.337328 \text{ 弧度/年。}$$

由上面两式可求出：

$$KL=37''.9405,$$

$$K=17''.4238,$$

故

$$L=2.163.$$

知道 K，L 和其他的地月軌道根数，可求出所有章动的系数。1952年在罗馬召开的国际天文协会上，通过了章动項的修正值，項数增加了很多。并自1960年起，世界各国天文年历按照新編的章动公式計算。公式如下：

近似周期 (日)	引		数			系	数
	l	l'	F	D	Ω	$\Delta\psi$(sin)	$\Delta\theta$(cos)
6798	0	0	0	0	+1	−17″.2327 − 0″.01737 T	+9″.2100 − 0″.00091 T
183	0	0	+2	−2	+2	− 1.2729 − 13 T	+0.5522 − 29 T
3399	0	0	0	0	+2	+ 0.2088 + 2 T	− 904 + 4 T
13.7	0	0	+2	0	+2	− 2037 − 2 T	+ 884 − 5 T
365	0	+1	0	0	0	+ 1261 − 31 T	
27.6	+1	0	0	0	0	+ 675 1 T	
122	0	+1	+2	−2	+2	− 497 + 12 T	+ 216 − 6 T
13.6	0	0	+2	0	+1	− 342 − 4 T	+ 183
9.1	+1	0	+2	0	+2	− 261	+ 113 − 1 T
365	0	−1	+2	−2	+2	+ 214 − 5 T	− 93 + 3 T
178	0	0	+2	−2	+1	+ 124 + 1 T	− 66
183	0	+2	0	0	0	+ 16 − 1 T	
91	0	+2	+2	−2	+2	− 15 + 1 T	+ 7
27.1	−1	0	+2	0	+2	+ 114	− 50
27.7	+1	0	0	0	+1	+ 58	− 31
27.4	−1	0	0	0	+1	− 57	+ 30
9.6	−1	0	+2	+2	+2	− 52	+ 22
1305	−2	0	+2	0	+1	+ 45	− 24
9.1	+1	0	+2	0	+1	− 44	+ 23
7.1	0	0	+2	+2	+2	− 32	+ 14
23.9	+1	0	+2	−2	+2	+ 26	− 11
6.9	+2	0	+2	0	+2	− 26	+ 11
27.0	−1	0	+2	0	+1	+ 19	− 10
386	0	+1	0	0	+1	− 15	+ 8
32.0	−1	0	0	+2	+1	+ 14	− 7
31.7	+1	0	0	−2	+1	− 13	+ 7
347	0	−1	0	0	+1	− 10	+ 5
9.5	−1	0	+2	+2	+1	− 9	+ 5
13.2	0	+1	+2	0	+2	+ 0″.0007	+0″.0003
14.2	0	−1	+2	0	+2	− 6	+ 3
5.6	+1	0	+2	+2	+2	− 6	+ 3
12.8	+2	0	+2	−2	+2	+ 6	− 2
14.8	0	0	0	+2	+1	− 6	+ 3
200	−2	0	0	+2	+1	− 5	+ 3
347	0	−1	+2	−2	+1	− 5	+ 3

近似周期（日）	引			数		系		数	
	l	l'	F	D	Ω	$\Delta\psi$(sin)		$\Delta\theta$(cos)	
23.9	+1	0	+2	−2	+1	+	5	−	3
14.7	0	0	0	−2	+1	−	5	+	3
7.1	0	0	+2	+2	+1	−	5	+	3
6786	0	−2	+2	−2	+1	−	4	+	2
212	+2	0	0	2	+1	+	4	−	2
6.9	+2	0	+2	0	+1	−	4	+	2
120	0	+1	+2	−2	+1	+	3	−	2
1616	−2	0	+2	0	+2	−	3	+	2
31.8	+1	0	0	−2	0	−	0.0149		
14.8	0	0	0	+2	0	+	60		
206	+2	0	0	−2	0	−	45		
13.8	+2	0	0	0	0	+	28		
13.6	0	0	+2	0	0	+	25		
173	0	0	+2	−2	0	−	21		
1095	+2	0	−2	0	0	+	10		
34.8	+1	+1	0	−2	0	−	7		
9.6	+1	0	0	+2	0	+	6		
29.8	+1	−1	0	0	0	+	4		
15.4	0	+1	0	−2	0	−	4		
29.5	0	0	0	+1	0	−	4		
26.9	+1	0	−2	0	0	+	4		
9.1	+1	0	+2	0	0	+	3		
25.6	+1	+1	0	0	0	−	3		
412	+1	0	0	−1	0	−	3		
9.4	+1	−1	+2	0	+2	−	3		
3233	+1	−1	0	−1	0	−	2		
13.7	−2	0	0	0	+1	−	0″.0002		
32.6	−1	0	+2	−2	+1	−	2		
13.8	+2	0	0	0	+1	+	2		
9.8	−1	−1	+2	+2	+2	−	2		
7.2	0	−1	+2	+2	+2	−	2		
27.8	+1	0	0	0	+2	−	2		
8.9	+1	+1	+2	0	+2	+	2		
5.5	+3	0	+2	0	+2	−	2		

其中 $l=M$，$l'=M_1$，$F=M+\widetilde{\omega}-\Omega$，$D=M-M_1+\widetilde{\omega}_1-\widetilde{\omega}$，$\Omega=N+\psi$. 具体計算式为(历元与 t 的定义同前)：

$$l=196°06'16''.59+1325^r198°50'56''.79t+33''.09t^2+0''.518t^3,$$

$$l'=358°28'33''.00+99^r359°02'59''.10t-0''.54t^2-0''.0120t^3,$$

$$F=11°15'03''.20+1342^r82°01'30''.54t-11''.56t^2-0''.0012t^3,$$

$$D=350°44'14''.95+1236^r307°06'51''.18t-5''.17t^2+0''.0068t^3,$$

$$\Omega=259°10'59''.79-5^r134°08'31''.23t+7''.48t^2+0''.0080t^3.$$

第二項中的 1325^r；r 表示一周，即 360°.

根据 L, K 的值，可以取出地、月质量之比和地球力学椭率。由

$$L=\frac{M}{S}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3=\frac{M}{E+M}\cdot\frac{E+M}{S}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3,$$

$$G(E+M)=n^2a^3,\ G(S+M)=GS=n_1^2a_1^3;$$

而 $\dfrac{2\pi}{n}=$恒星月，$\dfrac{2\pi}{n_1}=$恒星年，把 L 化为弧度，故得

$$\mu=\frac{M}{E}=\frac{1}{81.45}.$$

又由
$$K=\frac{3}{2}\left(\frac{C-A}{C}\right)\left(\frac{n_1}{\omega}\right),$$

以数值代入可求得：

$$\frac{C-A}{C}=\frac{1}{305.32}.$$

第八章　天体形状理論

第一章到第六章都是把天体考虑成质点，按照牛頓万有引力定律来研究它們的运动。但天体实际上并不是质点，是有一定大小和形状的物体。由于天体内部质点的互相吸引，使得天体的形状和內部結构有一定的規律，并且直接影响到天体的自轉。研究天体的形状和自轉問題，是天体力学中的一个重要分支，也是以牛頓万有引力定律为基础的。在本章中主要讲天体形状理論中的一些最初步的理論和結果。这里所提出的理論，主要以地球和行星为对象，不考虑輻射压力和膨脹压力。因此这些理論对恒星不适用，但可以推广到其他不发光的天体。

天体形状理論虽然很早就有了，但还是在牛頓万有引力提出以后，才正式成为一門学科。当时主要是根据实际需要来研究地球形状。在17世紀初期，三角測量法已开始在大地測量上应用，这就要求理論工作协同解决測量中的具体問題。18世紀初，卡西尼(Cassini)首先利用大地測量結果研究地球形状。第一次提出天体形状較完全理論的是克雷諾(1742)，他把地球考虑成不均匀的流体，其等位面不是球形，得到很多有价值的結果，这与大地測量結果更符合。克雷諾还开始对木星形状进行研究。以后随着数学的发展，特别是拉普拉斯和勒让德尔等人的工作，使得19世紀初期开始用地球函数来研究行星形状。

19世紀以后，由于大地測量有很大发展，得到的地球大小和形状的資料愈来愈准确，理論工作也有相应发展。通过雅哥比、馬克洛林、李亚普諾夫(Ляпнов)、潘加来、駱熙(Roche)等人的工作，

把这个部門的内容完整起来，而且与日益精确的大地測量以及天文測量結果更好地符合。

近代重力測量結果，发現地球重力有异常現象，最近人造卫星观测結果也証实了这点。这与地球内部結构有关，与其他很多地球物理現象也有密切关系。因此，关于天体形状理論，今后还有待于进一步发展。

要在本书中詳細介紹这个分支的内容是不可能的，只能把最基本的理論和重要結果作一番介紹，讀者如要詳細了解，可参考有关书籍和文献❶❷❸。

§1 流体自轉时平衡形状的一般性质

設一物体为不可压縮的流体，不受外力的影响。如物体在自轉，则物体内任一质点受到两个力的作用：一是物体内所有质点对它的吸引力，按牛頓万有引力定律，作用方向是向内的；另一种是由于物体自轉产生的离心力，方向向外。

設以物体质量中心为原点，z 軸为自轉軸；通过质量中心垂直于 z 軸的平面作为 x-y 面。对物体内的任一质点 $P(x, y, z)$，密度为 $\sigma(x, y, z)$，受到的压力記为 $p(x, y, z)$. 由于引力有位函数存在，設 $V(x, y, z)$ 为整个物体对 P 点吸引的位函数；再設 J_x, J_y, J_z 为其他力产生的加速度分量。假定物体处在平衡状态，根据流体静力学的基本知識，应有关系

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} - J_x, \\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} - J_y, \\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} - J_z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

❶ Tisserand 著：Traité de Mécanique Céleste, Tom. II.
❷ Appell 著：Traité de Mécanique Rationnelle, Tom. IV, Fasc. I, II.
❸ Субботин 著：Курс небесной механики, Том. III.

由于这里的其他的力就是自轉产生的离心力，而自轉軸为 z 軸，故产生的离心加速度分量为

$$J_z=0,\ J_x=-\omega^2 x,\ J_y=-\omega^2 y. \tag{2}$$

其中 ω 为自轉角速度。在本章的討論中，都认为 ω 是常数。代入(1)式后得

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}+\omega^2 x,\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial y}+\omega^2 y,\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

因为 p, V 都只是 (x, y, z) 的函数，在这三式中，第一式乘上 dx，第二式乘 dy，第三式乘 dz，相加則得

$$\frac{1}{\sigma}dp=dV+\omega^2(x\,dx+y\,dy)=dW, \tag{4}$$

其中

$$W=V+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2), \tag{5}$$

相当于引力及离心力合起来的位函数。由(4)式可看出：若

$$dW=0,\ 即\ W=常数 \tag{6}$$

时，应有 $dp=0$，即 $p=$常数。而 $W=$常数代表一个曲面，說明在此曲面上各点的 $p=$常数，換句話說，曲面 $W=$常数上所有各点受到的压力相等。这样的曲面称为水准面。下面先証明两个水准面的性质。

定理 1 水准面上所有的质点的密度都相同，即水准面与等密度面重合。

証 由(3)式和(5)式可得

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\sigma\frac{\partial W}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial y}=\sigma\frac{\partial W}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial z}=\sigma\frac{\partial W}{\partial z}.$$

由第一、二式得

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}+\sigma\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}+\sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}.$$

这里我們假定 ρ, W 对 x, y, z 的偏导数可以交换次序，于是把所得两式相減，即得

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}.$$

同理可得

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{\partial\sigma}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial y},\quad \frac{\partial\sigma}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

即为

$$\frac{\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}}{\dfrac{\partial W}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}}{\dfrac{\partial W}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}}{\dfrac{\partial W}{\partial z}}. \tag{7}$$

設比例常数为 K，于是

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\partial\sigma}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial\sigma}{\partial z}\,dz \\ &= K\left(\frac{\partial W}{\partial x}dx+\frac{\partial W}{\partial y}\,dy+\frac{\partial W}{\partial z}\,dz\right)=K\,dW. \end{aligned}$$

故当 $W=$ 常数时，$dW=0$，又从上式知应有 $d\sigma=0$，即 $\sigma=$ 常数，因此得到水准面上质点的密度为常数，則定理得証。

定理 2 水准面上质点的加速度方向与法綫方向重合。

証 設 $\varphi(x, y, z)=0$ 为任意一个水准面方程，可得关系

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0. \tag{8}$$

但根据水准面的性质知，应有

$$dW=dV+\omega^2(x\,dx+y\,dy),$$

即 $$\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\omega^2 x\right)dx+\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\omega^2 y\right)dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=0.$$

此式应与 (8) 式一样，故可得

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial V}{\partial x}+\omega^2 x}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial V}{\partial y}+\omega^2 y}=\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\dfrac{\partial V}{\partial z}}. \tag{9}$$

但(9)式中,在分子上的三个量与曲面 $\varphi(x, y, z)=0$ 上任一点的法綫的方向余弦成比例,而在分母的三个量正是曲面上同一点所受引力和离心力的加速度分量。于是从(9)式結果可知法綫方向与加速度方向重合,定理得証。

根据上面两个定理,水准面的意义就很清楚了。流体平衡时,表面上各点所受的压力为0,即 $p=0$, $dp=0$,故流体平衡时,表面也是一个水准面。

在研究地球时,定义水准面为:法綫方向与重力方向重合(其中重力包括地心引力和自轉离心力),这样的水准面叫做大地水准面。但地球表面陆地部分不是流体,而且高低不平,静止时的海平面才是标准的大地水准面,故应把海平面"延伸"到陆地上,作为地球表面。我們所謂地球的大小和形状,都是指地面这个大地水准面的大小和形状而言。关于地球情况,在后面再談。

流体的自轉运动,对自轉軸应有一定的选擇。設以质量中心为原点,取 x, y, z 軸为此物体的三个惯性主軸。令 A, B, C 为物体相应的主惯性矩。再令 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$(或用 p, q, r)为自轉角速度在三个坐标軸上的分量。若流体处于平衡状态时,則流体内各质点間的距离不再变化,故可看成剛体,可用剛体运动中的公式来描述它的轉动。由于这里沒有外力作用,故根据剛体运动的欧拉公式(見第七章 §2)得

$$A\dot{\omega}_x+(C-B)\omega_y\omega_z=0,$$
$$B\dot{\omega}_y+(A-C)\omega_x\omega_z=0,$$
$$C\dot{\omega}_z+(B-A)\omega_y\omega_x=0.$$

若自轉角速度 ω 为常数,則

$$\dot{\omega}_x=\dot{\omega}_y=\dot{\omega}_z=0,$$

故 $$(C-B)\omega_y\omega_z=(A-C)\omega_x\omega_z=(B-A)\omega_y\omega_x=0.$$

从这个关系可知:若 A, B, C 互不相等,則 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 中有两个

为 0 (不可能三个都为 0)，例如 $\omega_x=\omega_y=0$；則自轉軸为 z 軸，为慣性主軸。若 A，B，C 中有两个相等，卽慣性橢球为旋轉橢球体，例如 $A=B\neq C$，則从上式应有 $\omega_y\omega_z=0$，$\omega_z\omega_x=0$，这只可能有两种結果：一为 $\omega_y=\omega_x=0$，此时 z 軸为自轉軸；另一种情况为 $\omega_z=0$，則自轉軸应为 x-y 平面上的任一直綫（通过原点），也可以认为是慣性主軸。若 $A=B=C$，卽慣性橢球为球形，自轉軸可以为通过原点的任一条直綫；但此时也可以认为是慣性主軸，因此我們可得下面定理。

定理 3 流体自轉平衡时，若自轉角速度为常数，則自轉軸只可能是流体的慣性主軸。

这个結果是潘加来在 1900 年得到的，有很重要意义。

既然自轉軸为慣性主軸，取它作为坐标軸的 z 軸；仍以质量中心为原点，通过质量中心垂直于自轉軸的平面定义为赤道面(在这里卽 x-y 平面)。

如果自轉的流体处于平衡状态，表面 S 应为一个水准面，它的方程可写为

$$W=V+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=\text{常数}。\tag{10}$$

利用奧斯特罗格拉茨基(Остроградский)公式

$$\iint\limits_S \frac{\partial W}{\partial n_i}dS=-\iiint\limits_T \nabla^2 W d\tau$$

$$=-\iiint\limits_T\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)d\tau。\tag{11}$$

后面体积积分是对整个流体，n_i 取內法綫方向，卽

$$\frac{\partial W}{\partial n_i}=\frac{\partial W}{\partial x}\alpha+\frac{\partial W}{\partial y}\beta+\frac{\partial W}{\partial z}\gamma。$$

其中 (α,β,γ) 为內法綫对三个坐标軸的方向余弦，但 W 对 (x,y,z) 的偏微商是加速度的分量，因此 $\frac{\partial W}{\partial n_i}$ 为加速度分量在內法綫上

的投影。可是表面 S 为水准面，上面任一点加速度方向应与法綫方向相同，而且一定向內面(如加速度向外面，則不会平衡)，故 $\frac{\partial W}{\partial n_i}$ 就是 S 上的点的加速度，并永远为正。故(11)式有

$$\iiint_T \nabla^2 W d\tau < 0. \tag{12}$$

但从(10)式知

$$\nabla^2 W = \nabla^2 V + 2\omega^2,$$

因 V 为整个流体对表面上一点的位函数，即

$$\iiint_T \frac{G\sigma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}},$$

其中 (x, y, z) 为流体表面上一点的坐标，G 为万有引力常数。因此应满足柏松方程，即

$$\nabla^2 V = -4\pi G\sigma. \tag{13}$$

于是
$$\nabla^2\omega = \nabla^2 V + 2\omega^2 = -4\pi G\sigma + 2\omega^2.$$

代入(12)得

$$\iiint_T (-4\pi G\sigma + 2\omega^2) d\tau < 0.$$

但角速度 ω 为常数，上式成为

$$\omega^2 \iiint_T d\tau < 2\pi G \iiint_T \sigma d\tau.$$

令 $\bar{\sigma}$ 为平均密度，即

$$\bar{\sigma} = \frac{\iiint_T \sigma d\tau}{\iiint_T d\tau},$$

故上式成为

$$\omega^2 < 2\pi G\bar{\sigma}. \tag{14}$$

这說明流体自轉平衡时，角速度应有上面的限制，首先由潘加来发現，故称为**潘加来定理**，即

定理 4 流体自轉平衡时，角速度 ω 一定小于 $\sqrt{2\pi G\sigma}$。

数值 $\sqrt{2\pi G\sigma}$ 又称为潘加来极限。太阳系的各行星和卫星，都符合这个条件。

§2 均匀流体自轉平衡时为旋轉椭球体的情形，馬克洛林理論

我們先来討論均匀流体的情形，即密度为常数。根据地球和行星的情况，假定表面为椭球体，角速度也設为常数；z 軸为自轉軸。設表面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

由于表面也是一个水准面，可表为

$$V+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=\text{常数}, \tag{2}$$

其中 V 为流体对表面上一点的位函数，根据公式(1-4-15)知

$$\begin{aligned}V&=\pi abc\sigma G\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta}\\&=\text{常数}-Px^2-Qy^2-Rz^2.\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},\\P&=\pi abcG\sigma\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)\Delta},\\Q&=\pi abcG\sigma\int_0^\infty\frac{ds}{(b^2+s)\Delta},\\R&=\pi abcG\sigma\int_0^\infty\frac{ds}{(c^2+s)\Delta}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

因此(2)式成为

$$\left(P-\frac{\omega^2}{2}\right)x^2+\left(Q-\frac{\omega^2}{2}\right)y^2+Rz^2=\text{常数}。$$

P，Q，R 都是常数，由于上式应与(1)式一样，故系数应成比例，可得

$$a^2\left(P-\frac{\omega^2}{2}\right)=b^2\left(Q-\frac{\omega^2}{2}\right)=c^2R. \tag{5}$$

作下列变换，令

$$s=c^2\zeta, \quad u=\frac{c^2}{a^2}, \quad v=\frac{c^2}{b^2}, \tag{6}$$

则(4)式成为

$$\left.\begin{aligned} P&=\pi G\sigma\int_0^\infty \frac{u\,d\zeta}{(1+u\zeta)D}, \quad Q=\pi G\sigma\int_0^\infty \frac{v\,d\zeta}{(1+v\zeta)D}, \\ R&=\pi G\sigma\int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta)D}, \quad D=\sqrt{(1+\zeta)(1+u\zeta)(1+v\zeta)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

于是(5)式看作两个等式，化为

$$a^2\left(P-\frac{\omega^2}{2}\right)=c^2R, \quad b^2\left(Q-\frac{\omega^2}{2}\right)=c^2R.$$

从(6)，(7)代入得

$$\left.\begin{aligned} \Omega&=\frac{\omega^2}{2\pi G\sigma}=\int_0^\infty \frac{\zeta u(1-u)\,d\zeta}{(1+\zeta)(1+u\zeta)D}, \\ \Omega&=\frac{\omega^2}{2\pi G\sigma}=\int_0^\infty \frac{\zeta v(1-v)\,d\zeta}{(1+\zeta)(1+v\zeta)D}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

这两个式子是相等的，相减得

$$(u-v)\int_0^\infty (1-u-v-uv\zeta)\frac{\zeta\,d\zeta}{D^3}=0. \tag{9}$$

(9)式只能有两种結果：

1. $u=v$，即 $a=b$ 为旋轉橢球体情形，首先由馬克洛林研究，称为馬克洛林旋轉橢球体，在本节討論。

2. $u\neq v$，即橢球体的三軸不等，首先由雅哥比研究，称为雅哥比三軸橢球体，将在下节討論。

設 $u=v$，即 $a=b$，則(8)式中两个式子相同，应为

$$\Omega=\varphi(u)=\int_0^\infty \frac{u(1-u)\zeta\,d\zeta}{(1+u\zeta)^2(1+\zeta)^{\frac{3}{2}}}, \tag{10}$$

此式可以积分出来：

$$\varphi(u)=\frac{1+2u}{1-u}\sqrt{\frac{u}{1-u}}\,\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\frac{1-u}{u}}-\frac{3u}{1-u}. \tag{11}$$

若 $a<c$，則 $u=\frac{c^2}{a^2}>1$，故 $1-u<0$，因此，由(11)式可知 $\varphi(u)$ 应为复数，而 $\varphi(u)$ 表示自轉角速度平方：

$$\varphi(u)=\Omega=\frac{\omega^2}{2\pi G\sigma},$$

不可能成立。由此可得出結論：$a<c$ 时不可能有自轉平衡形状。因 c 为自轉軸上的半徑，$a<c$ 时称为长形的旋轉橢球体，即可得下面結論：

均匀流体自轉时平衡形状不可能为长形旋轉橢球体，因此必須有 $a>c$，即扁球体。令

$$a^2=c^2(1+l^2)，\ 則\ u=\frac{1}{1+l^2},\ \sqrt{\frac{1-u}{u}}=l.$$

(11)式成为

$$\Omega=\frac{3+l^2}{l^3}\,\mathrm{tg}^{-1}l-\frac{3}{l^2}=\psi(l). \tag{12}$$

若把 $\mathrm{tg}^{-1}l$ 展为級数，則为

$$\begin{aligned}\psi(l)=\Omega&=-\frac{4}{15}l^2+\frac{8}{35}l^4+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4nl^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}.\end{aligned} \tag{13}$$

从(13)式知，$\psi(0)=0$；而从(12)式知，$\psi(\infty)=0$。現在証明 $\psi(l)$ 在 $(0,+\infty)$ 之內只有一个极大值。$\psi(l)$ 的极大値应为 $\psi'(l)=0$ 时的解。由于

$$\psi'(l)=\frac{l^2+9}{l^4}\theta(l)，其中\ \theta(l)=\frac{7l^3+9l}{(l^2+1)(l^2+9)}-\mathrm{tg}^{-1}l.$$

故 $\psi'(l)=0$ 的根即为 $\theta(l)=0$ 的根。

但 $$\theta(0)=0,\quad \theta(\infty)=-\frac{\pi}{2},$$

而
$$\theta'(l)=\frac{8l^4(3-l^2)}{(l^2+1)^2(l^2+9)}.$$

故 $\theta'(l)=0$ 只有一个正根，即 $l=\sqrt{3}$. 在 $l<\sqrt{3}$ 时，$\theta'(l)>0$，故 $\theta(l)$ 上升；$l>\sqrt{3}$ 时，$\theta'(l)<0$，故 $\theta(l)$ 下降。則 l 从 $0\to\infty$ 时，$\theta(l)$ 从 0 先上升然后下降到 $-\frac{\pi}{2}$，只可能有一次使 $\theta(l)=0$，即 $\theta(l)=0$ 只有一个正根。即 $\psi'(l)=0$ 只有一个正根，也就是 $\psi(l)$ 只有一个极值。但 $\psi(l)=\Omega=\frac{\omega^2}{2\pi G\sigma}>0$，而 $\psi(0)=0$，$\psi(\infty)=0$，故这个极值一定是极大值。它的数值可以先解 $\theta(l)=0$，把它的唯一正根解出，設为 l_0，則 $\psi(l)=\Omega$ 的极大值为 $\psi(l_0)$。利用数字解法，可解出 $l_0=2.5293\cdots$。故 $\psi(l_0)=0.22467$，这就是 $\Omega=\frac{\omega^2}{2\pi G\sigma}$ 的极大值，于是又得到一个 ω 的极大值。故下面定理成立。

定理 若均匀流体自轉平衡时为旋轉椭球体，則自轉角速度 ω 应符合关系：

$$\Omega=\frac{\omega^2}{2\pi\sigma G}<0.22467.$$

对于太阳系内行星和卫星都能符合这个条件。对地球来說，若取 σ 为平均密度，則 $\Omega=0.0023$。

根据 l 的定义，$a^2=c^2(1+l^2)$，故 l 为旋轉椭球体子午截面的偏心率。如果根据观测知道 Ω，則可反过来求 l. 由 (13) 式可以解出

$$l^2=\frac{15}{4}\Omega+\frac{6}{7}\left(\frac{15}{4}\Omega\right)^2+\frac{37}{49}\left(\frac{15}{4}\Omega\right)^3+\cdots. \qquad (14)$$

如用椭率来表示，則因椭率 α 为

$$\alpha=\frac{a-c}{a}=1-\frac{1}{\sqrt{1+l^2}}=\frac{l^2}{2}-\frac{3}{8}l^4+\frac{5}{16}l^6-\cdots,$$

因此有

$$\alpha=\frac{15}{8}\Omega+\frac{675}{896}\Omega^2+\cdots. \tag{15}$$

如用地球数值代入应得

$$\alpha=\frac{1}{231.6}.$$

这与实际情况差得还远，是由于假定地球为均匀旋轉椭球体的線故。

§3　均匀流体自轉平衡时为三軸椭球体的情形，雅哥比的理論

現在来討論(8-2-9)式的第二种情形($u\neq v$)，即应有

$$\psi(u,\ v)=\int_0^\infty(1-u-v-uv\zeta)\frac{\zeta\,d\zeta}{D^3}=0. \tag{1}$$

另外再由(8-2-8)的两式中，以 v 乘第一式；以 u 乘第二式，相减后可得

$$\Omega=uv\int_0^\infty\frac{\zeta\,d\zeta}{(1+u\zeta)(1+v\zeta)D}=\phi(u,\ v). \tag{2}$$

由(1)式知

$$(1-u-v)\int_0^\infty\frac{\zeta\,d\zeta}{D^3}=uv\int_0^\infty\frac{\zeta^2\,d\zeta}{D^3},$$

两个积分都应为正；而 u, v 都是正数，因此必須有 $1-u-v>0$，即 $u+v<1$．由此可得 $u<1$, $v<1$，即有 $a>c$, $b>c$，于是同样有上节的結果：長形椭球体不可能为均匀流体自轉时的平衡形状。

(1)，(2) 两式为 u, v 的关系式，如 Ω 已知，則可以解出它們的数值。先討論(1)式，由于

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\zeta(1+\zeta)(1+v\zeta)}{D^5}[2+(3-u-v)\zeta-uv\zeta^2]d\zeta$$
$$=-A_0-A_1v. \tag{3}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)}{D^5}[2+(3-u-v)\zeta-uv\zeta^2]d\zeta, \tag{4}$$

$$A_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\zeta^2(1+\zeta)}{D^5}[2+(3-u-v)\zeta-uv\zeta^2]d\zeta. \tag{5}$$

由于 $\psi(u,v)$ 是 u, v 的对称函数，因此有

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}=-A_0-A_1u. \tag{6}$$

另外由于

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\zeta^2(1+\zeta)}{D^5}\right]=\frac{\zeta(1+\zeta)[4+(3+u+v)\zeta-2uv\zeta^2-3uv\zeta^3]}{2D^5},$$

两端乘上 $d\zeta$，由 $0\to\infty$ 进行积分，则左端为 0，于是有

$$0=\int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)}{D^5}[4+(3+u+v)\zeta-2uv\zeta^2-3uv\zeta^3]d\zeta. \tag{7}$$

由(4)式减去 $\frac{1}{4}\times(7)$式得

$$A_0=\frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)}{D^5}(1-u-v+uv\zeta^2)d\zeta. \tag{8}$$

因 $u+v<1$，故(8)式被积函数在 ζ 的积分限内永远为正，因此可得 $A_0>0$。

再由(5)式与(8)式可得

$$2A_0+3A_1=\frac{3}{2}(3-u-v)\int_0^\infty \frac{\zeta^2(1+\zeta)^2}{D^5}d\zeta, \tag{9}$$

也永远为正。

于是由(3)，(6)两式可得

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=-A_0-A_1v=-A_0\left(1-\frac{2}{3}v\right)-\frac{v}{3}(2A_0+3A_1),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}=-A_0-A_1u=-A_0\left(1-\frac{2}{3}u\right)-\frac{u}{3}(2A_0+3A_1).$$

根据上面的討論知：$A_0>0$，$2A_0+3A_1>0$，而 u，v 为正，并且 $u<1$，$v<1$，因此有

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}<0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}<0. \tag{10}$$

也就是說，若固定 u 的値，則 $\psi(u, v)$ 为 v 的单調减小函数；反之，若固定 v 的値，$\psi(u, v)$ 又是 u 的单調减小函数。現在假定固定 v 值，設 $v=v_0$ $(0<v_0<1)$，現在討論 u 从 0 到 1 变化时的情况。由于

$$\psi(0, v_0)=(1-v_0)\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{3}{2}}(1+v_0\zeta)^{\frac{3}{2}}}>0,$$

$$\psi(1, v_0)=-v_0\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{(1+\zeta)^2(1+v_0\zeta)^{\frac{3}{2}}}<0.$$

但　$\dfrac{\partial\psi}{\partial u}<0$，即固定 v 的値后，在 u 由 0 增到 1 时，ψ 应由正値单調减小到負值，因此 $\psi(u, v_0)=0$ 必有唯一的一个根 u_0，而且 $0<u_0<1$。这就說明了 $\psi(u, v)=0$ 表示在域 $0<u<1$，$0<v<1$ 內，u 为 v 的单值函数。同样，反过来也成立，$\psi(u, v)=0$ 也表示 v 为 u 的单値函数。又由

$$\frac{du}{dv}=-\frac{\partial\psi(u, v)}{\partial v}\Big/\frac{\partial\psi(u, v)}{\partial u}, \tag{11}$$

根据 (10) 知　在 $0<u<1$，$0<v<1$，应有 $\dfrac{du}{dv}<0$，也就是說，$\psi(u, v)=0$ 还表示 u 为 v 的单調减小函数，而且在 $v=0$ 时，

$$0=\psi(u, 0)=(1-u)\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{(1+\zeta)^2(1+u\zeta)^{\frac{3}{2}}},$$

而积分永远为正，故只有 $u=1$。在 $v=1$ 时，

$$0=\psi(u, 1)=-u\int_0^\infty \frac{\zeta\, d\zeta}{(1+\zeta)^2(1+u\zeta)^{\frac{3}{2}}},$$

只有 $u=0$。这些函数都是連續函数，根据上面的討論可得，当 v 由 0 連續单調增加到 1 时，u 应由 1 連續单調减小到 0，因此在这个变化过程中，一定有 $u=v$ 的情况出现，而且只有一次。設这个値为 τ，当然有 $0<\tau<1$。于是 u，v 的关系可以归納如下：

$$\left.\begin{array}{ll} v=0 \text{ 时，} u=1; & v<\tau \text{ 时，} u>\tau; \\ v=\tau \text{ 时，} u=\tau; & v>\tau \text{ 时，} u<\tau; \\ v=1 \text{ 时，} u=0. & \end{array}\right\} \tag{12}$$

当 $u=v=\tau$ 时，方程(1)变成

$$(1-2\tau)\int_0^\infty \frac{\zeta\,d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{3}{2}}(1+\tau\zeta)^3}=\tau^2\int_0^\infty \frac{\zeta^2\,d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{3}{2}}(1+\tau\zeta)^3}, \tag{13}$$

可以解出 τ。

现在来討論(2)式，由于

$$\Omega=\phi(u,\,v)=uv\int_0^\infty \frac{\zeta\,d\zeta}{(1+u\zeta)(1+v\zeta)D},$$

因前面已討論过，u 为 v 的函数，因此

$$\frac{d\phi}{dv}=\frac{\partial\phi}{\partial v}+\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{du}{dv}.$$

以(11)式代入后可化为

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{d\phi}{dv}=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}-\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{14}$$

但由(2)式得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial u}&=v\int_0^\infty \frac{\zeta\left(1-\frac{1}{2}u\zeta\right)d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{1}{2}}(1+u\zeta)^{\frac{3}{2}}(1+v\zeta)^{\frac{3}{2}}}\\ &=v\int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)^2}{D^5}\left[1+\left(v-\frac{1}{2}u\right)\zeta-\frac{1}{2}uv\zeta^2\right]d\zeta\\ &=v\left[B_0+B_1\left(v-\frac{1}{2}u\right)\right],\end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$B_0=\int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)^2}{D^5}\left(1-\frac{1}{2}uv\zeta^2\right)d\zeta, \tag{16}$$

$$B_1=\int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)^2}{D^5}\,d\zeta. \tag{17}$$

同样，由于 $\phi(u,\,v)$ 为 u，v 的对称函数，有

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = u\left[B_0 + \left(v - \frac{1}{2}v\right)B_1\right]. \tag{18}$$

以前面的(3)，(6)及(15)，(18)式代入(14)式得

$$-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{d\phi}{dv} = (u-v)\left[A_0B_0 + A_0B_1(u+v) + \frac{3}{2}A_1B_1uv\right]$$
$$= (u-v)\left\{A_0B_0 + A_0B_1[u + (1-u)v] + \frac{1}{2}B_1(2A_0+3A_1)uv\right\}. \tag{19}$$

根据前面的討論和各量的定义可知：$A_0>0, 2A_0+3A_0>0, B_1>0$, $u+(1-u)v>0$, $-\frac{\partial\psi}{\partial u}>0$；其中只差 B_0 还不知道，但从(16)式减去 $\frac{1}{4}\times$(7)式得

$$B_0 = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\zeta(1+\zeta)}{D^5}(1-u-v+uv\zeta^2)\,d\zeta>0.$$

故由(19)式可得 $\frac{d\phi}{dv}$ 与 $(u-v)$ 同号，也就是說：当 $u-v>0$ 时，由(12)式知，即 $v<\tau$ 时，$\frac{d\phi}{dv}>0$；$u-v<0$ 时，由(12)式知，即 $v>\tau$ 时，$\frac{d\phi}{dv}<0$。容易看出，$\frac{d\phi}{dv}$ 也是連續函数，因此应有 $u-v=0$ 时，即 $v=\tau$ 时，必有 $\frac{d\phi}{dv}=0$；故此时 ϕ 为极值，也就是 Ω 达到极值；而且是唯一的，并显然是极大值。設这个值为 $\phi_1=\Omega_1$。因此，若 $\Omega>\Omega_1$ 时，則(2)式不成立，得不到三軸橢球体的解；当 $\Omega<\Omega_1$ 时，由于 Ω_1 为极大值，可由(1)，(2)式解出两組 u, v 的对称函数，这两組解实际上只代表一个三軸橢球体(u, v 交换)。当 $\Omega=\Omega_1$ 时，由前面討論知，应为 $u=v=\tau$，即 $a=b$，为旋轉橢球体。

剩下的問題是求出有关的数值，首先需要求出 τ，再从它得到 Ω_1。

(13)式即为 τ 的方程，两个积分都可以积出，表为 τ 的有理函数和反正切函数，而且在 $0<\tau<1$ 范圍內只有唯一的解，这里不去

詳細討論了，可参看达尔文(Darwin)的文章[1]，計算結果为

$$\tau = 0.3396\cdots.$$

代入(2)式得相应的 $\Omega_1 = 0.18711484\cdots$，故可得下面的雅哥比定理。

定理 均匀流体自轉平衡时，若 $\Omega > \Omega_1 = 0.18711\cdots$，則形状不可能为三軸椭球体；若 $\Omega = \Omega_1$，則只能为旋轉椭球体；在 $\Omega < \Omega_1$ 时才可能为三軸椭球体。

其实根据上节的馬克洛林理論，$\Omega < \Omega_1$ 时也可以为旋轉椭球体。

雅哥比的理論用到地球情况时，效果不好，主要是因为地球不是均匀流体。

§4 均匀流体在引力变形时的平衡形状，駱熙极限

前面几节都是考虑沒有外力影响的均匀流体平衡形状，对于行星大体可以用，但对于卫星就不行了，因为行星对它的卫星的引力很大，故在討論卫星形状时，必須考虑行星的吸引。本节主要討論这个問題，但还是限于均匀流体情形，而且把行星看成一质点(或等密度面为球形)。

取坐标原点为所討論流体(卫星)的质量中心 O，設 S 为吸引体(行星)，质量为 M'；取 OS 为 x 軸方向；記 $OS = A$。如果不考虑流体自轉，則流体內每一质点 $P(x, y, z)$ 应受到三个力的作用。

1．整个流体对它的引力，位函数为 V。

2．S 的直接引力，位函数为

$$U = \frac{GM'}{r}, \quad r^2 = (x - A)^2 + y^2 + z^2.$$

---

[1] Darwin: On Jacobi's figures of equilibrium for a rotating mass of fluid, 載 Proceeding of the Royal Society, Vol. 41.

3. S 的間接引力，即由于 S 对质量中心 O 的引力，使各质点相对 O 有一加速度，在 x 軸方向，与 OS 方向相反，故分量应为

$$(-GM'/A^2,\ 0,\ 0).$$

因此，在(8-1-1)式中，J_x, J_y, J_z 应包括后两种引力产生的加速度，故相应的水准面方程为

$$V+U-GM'x/A^2=\text{常数}。 \tag{1}$$

由于在卫星的情形中，x, y, z 都比 A 小得很多，可以把 U 展为 $\frac{x}{A}$, $\frac{y}{A}$, $\frac{z}{A}$ 的級数，只准到 A^{-3}（見第一章 §1），即

$$U=GM'\left(\frac{1}{A}+\frac{x}{A^2}+\frac{2x^2-y^2-z^2}{2A^3}\right).$$

故(1)式成为

$$V+\frac{GM'}{A}+\frac{\omega_1^2}{2}(2x^2-y^2-z^2)=\text{常数},$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{即}\qquad V+\frac{\omega_1^2}{2}(2x^2-y^2-z^2)=\text{常数},\\&\text{其中}\qquad \omega_1^2=\frac{GM'}{A^3}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

若流体平衡时为椭球面，即表面为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

則由上面討論（§ 2）可知

$$V=\text{常数}-Px^2-Qy^2-Rz^2, \tag{4}$$

因此(2)式成为

$$(P-\omega_1^2)x^2+\left(Q+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)y^2+\left(R+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)z^2=\text{常数}。$$

由于表面也是水准面，則上式与(3)式应一样，即系数应成比例，故得

$$a^2(P-\omega_1^2)=b^2\left(Q+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)=c^2\left(R+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)=\text{常数}。 \tag{5}$$

与§2一样，令 $u=c^2a^{-2}$, $v=c^2b^{-2}$，则(5)式可看作两个等式，并用(8-2-4)式中 P, Q, R 的表达式得

$$(2+u)\Omega_1=u(1-u)\int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta)(1+u\zeta)D}, \tag{5'}$$

$$(v-1)\Omega_1=v(1-v)\int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta)(1+v\zeta)D}. \tag{5''}$$

其中 $\Omega_1=\dfrac{\omega_1^2}{2\pi G\sigma}$, $D=\sqrt{(1+\zeta)(1+u\zeta)(1+v\zeta)}$.

由于 $\Omega_1>0$，故由(5′)式知，必有 $u<1$；由(5″)式知，必有 $v=1$(因左端的积分都是正的)，由此可得 $a>b=c$. 也就是說，如果平衡时形状为椭球体，则必为旋轉椭球体，而且是长形的；向 S 方向(即 x 軸方向)为长徑，即向着 S 和背着 S 方向是凸出的。这就是潮汐现象。由于这里只准确到 $\dfrac{x}{A}$, $\dfrac{y}{A}$, $\dfrac{z}{A}$ 的二次冪，即所考虑的流体大小与到 S 的距离相差太多，故又称为无限小的潮汐椭球体。

現在問題是要求出 Ω_1 的值在什么范圍内，(5′)式可解出 u，也就是要求出 Ω_1 的极大值。下面介紹一种較简单的方法。

設(5)式的公共常数为 N，則(5)式可写为

$$P-\omega_1^2=Na^{-2},\ Q+\frac{1}{2}\omega_1^2=Nb^{-2},\ R+\frac{1}{2}\omega_1=Nc^{-2}. \tag{6}$$

相加得

$$P+Q+R=N(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}). \tag{6'}$$

由于这里的位函数 V 应满足柏松方程(因 V 为流体对内点的位函数)，即

$$\nabla^2V=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=-4\pi G\sigma,$$

以(4)式 V 的表达式代入即得

$$P+Q+R=2\pi G\sigma.$$

故(6′)式成为

$$2\pi G\sigma = N(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}).$$

由此可求出 N，代入 $P-\omega_1^2=Na^{-2}$ 得

$$(P-\omega_1^2)(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})=2\pi G\sigma a^{-2}.$$

以 P 的表达式代入，并引入 u，v 的記号，可得

$$\Omega_1=\frac{\omega_1^2}{2\pi G\sigma}=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{u\,d\zeta}{(1+u\zeta)D}-\frac{u}{1+u+v}. \tag{7}$$

其中 u，v，D 的意义与前面一样。(7)式要比(5)式簡单一些，而这里 $v=1$，故(7)式成为

$$\Omega_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{u\,d\zeta}{(1+\zeta)(1+u\zeta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{u}{2+u}=\varphi_1(u). \tag{8}$$

实际上，(8)式可以积分出来成为

$$\Omega_1=\varphi_1(u)=\frac{u}{2(1-u)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1-u}}{1-\sqrt{1-u}}-\frac{3u}{(1-u)(2+u)}. \tag{9}$$

(9)式对 u 不好討論，再把 u 改为子午截面的偏心率 e，即

$$e^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-u,$$

代入(9)式得

$$\begin{aligned}\Omega_1=\varphi_1(u)=\psi(e)&=\frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}-\frac{3(1-e^2)}{e^2(3-e^2)}\\&=\frac{4}{45}e^2+\frac{16}{945}e^4+\cdots.\end{aligned} \tag{10}$$

由(10)式知 $\psi(0)=0$ 及 $\psi(1)=0$（以 $e=1$ 代入第一項为不定形，用极限方法可証明它仍为 0）。現在要証明 $\psi(e)$ 在 $0<e^2<1$ 有唯一的极大值。

$$\left.\begin{aligned}&\text{因}\qquad \psi'(e)=\frac{3-e^2}{e^4}\theta(e),\\&\text{其中}\qquad \theta(e)=\frac{27e-18e^3+7e^5}{(3-e^2)^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

在 $\psi'(e)=0$ 时，$e^2=3$ 为一解，但大于 1，不符合这里情况。故应

找出 $\theta(e)=0$ 的解。由于 $\theta(0)=0$，$\theta(1)=-\infty$，故 e 由 0 連續变化到 1 时，$\theta(e)$ 由 0 变到 $-\infty$，若 $\theta(e)$ 单調減少，則 $\theta(e)=0$ 不再有解，若 $\theta(e)$ 先增加然后再单調減小到 $-\infty$，則 $\theta(e)=0$ 在 $0<e<1$ 还有一解。而

$$\theta'(e)=\frac{8e^2(3-4e^2-e^4)}{(1-e^2)(3-e^2)^4},$$

故 $\theta'(e)=0$ 有一解，在 $0<e<1$ 内，即分子上 e 的四次方程的根 $e^2=\sqrt{7}-2$；$e=\sqrt{\sqrt{7}-2}=0.80358$。因此，当 $0<e<0.80358$ 时，$\theta'(e)>0$，即 $\theta(e)$ 为单調增加，而在 $0.80358<e<1$ 时 $\theta'(e)<0$，即 $\theta(e)$ 单調減少。故得在 e 由 0 連續变化到 1 时，$\theta(e)$ 由 0 先单調增加，后又单調減少，因此 $\theta(e)=0$ 在 $0<e<1$ 内还有一个根。由上面可看出这个根应在 $0.80358<e<1$ 内，且为唯一的。而且显然可看出，这个根对应的 $\Omega_1=\psi(e)$ 为极大值。

用数字解法可以求出这个根，設为 e_m，算出后知：

$$e_m=0.882579\cdots,$$

相应的

$$u=1-e_m^2=0.22101,$$

$$\Omega_1=\psi(e_m)=0.062768.$$

这就是 Ω_1 的极大值。在极大值时，由于 $e=0.882\cdots$，椭球体已相当长，接近于棒状。

由上可知，如要流体平衡形状成为椭球体，必須

$$\Omega_1\leqslant 0.062768,$$

即必須

$$\frac{M'}{\sigma A^3}=\frac{\omega_1^2}{G\sigma}=2\pi\Omega_1\leqslant 0.394383.$$

若考虑 S 为球形均匀体，密度为 σ'，半徑为 R，則

$$M'=\frac{4}{3}\pi R^3\sigma'.$$

故上面条件变成

$$A \geqslant 2.20 R\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{12}$$

这就是卫星要成为椭球体时，在距离上的限制条件。

上面的討論还沒有考虑流体的运动。实际上，卫星是在繞行星轉动，并随着进行公轉，它的每一个质点都有同样的轉动，轉动軸应垂直于軌道面。取流体（卫星）质量中心为原点；軌道平面为 x-y 平面；z 軸为轉动軸；取 Ox 軸方向为 OS，即这个坐标系为旋轉坐标。若繞 S 轉动的角速度 ω 为常数（即設繞 S 的运动为圓形軌道），則 Ox 軸也是以角速度 ω 在旋轉。仍假定只取到 $\frac{x}{A}$ 等的二次冪。这里的情况与剛才討論过的只有一点差别，就是流体还由于轉动产生离心力。加速度分量应为 $(\omega^2 x, \omega^2 y, 0)$，故相应的水准面方程应改为

$$V+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+\frac{\omega_1^2}{2}(2x^2-y^2-z^2)=\text{常数}, \tag{13}$$

其中仍有
$$\omega_1^2=\frac{GM'}{A^3}.$$

但公轉角速度与距离 A 有一关系，即克普勒第三定律：

$$\omega^2 A^3=G(M+M'),$$

其中 M 为流体质量。若用 μ 表示质量之比，即

$$\mu=\frac{M}{M'},$$

則应用

$$\omega^2=G(M+M')A^{-3}=GM'(1+\mu)A^{-3}=\omega_1^2(1+\mu) \tag{14}$$

代入(13)式得

$$2V+(3+\mu)\omega_1^2 x^2+\mu\omega_1^2 y^2-\omega_1^2 z^2=\text{常数}。 \tag{15}$$

若平衡时表面仍为椭球体，即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

如仍用 P, Q, R 表达位函数 V，则(15)式成为

$$[2P-(3+\mu)\omega_1^2]x^2+[2Q-\mu\omega_1^2]y^2+[2R+\omega_1^2]z^2=\text{常数}。$$

因此，相当于上面(6)式应成为

$$\left.\begin{aligned}&2P-(3+\mu)\omega_1^2=Na^{-2},\\&2Q-\mu\omega_1^2=Nb^{-2},\\&2R+\omega_1^2=Nc^{-2}.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

把三式相加得

$$2(P+Q+R)-2(1+\mu)\omega_1^2=N(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}).$$

上面已討論过，$P+Q+R=2\pi G\sigma$，故上式为

$$4\pi G\sigma-2(1+\mu)\omega_1^2=N(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}),$$

由此可定出 N，代入(16)，仍用前面的符号得

$$(1+u+v)\int_0^\infty\frac{u\,d\zeta}{(1+u\zeta)D}=2u+[3+\mu+(1-\mu)u+(3+\mu)v]\Omega_1;\tag{17}$$

$$(1+u+v)\int_0^\infty\frac{v\,d\zeta}{(1+v\zeta)D}=2v+[(1+\mu)u-(2+\mu)v]\Omega_1;\tag{18}$$

$$(1+u+v)\int_0^\infty\frac{d\zeta}{(1+\zeta)D}=2-[3+2\mu+u+v]\Omega_1.\tag{19}$$

其中仍然是

$$\Omega_1=\frac{\omega_1^2}{2\pi G\sigma};\quad D=\sqrt{(1+\zeta)(1+u\zeta)(1+v\zeta)}.$$

以 v 乘(17)式，u 乘(18)式然后相加得

$$\Omega_1=\frac{uv(v-u)}{3v+\mu(v-u)}\int_0^\infty\frac{\zeta\,d\zeta}{(1+u\zeta)(1+v\zeta)D}.\tag{20}$$

代入(19)式后可化为

$$\begin{aligned}&[uv(v-u)+3v^2-3v+\mu(v+u)(v-u+1)]\int_0^\infty\frac{\zeta\,d\zeta}{D^3}\\&+uv[4v-u-3+\mu(v-u)]\int_0^\infty\frac{\zeta^2\,d\zeta}{D^3}=0.\end{aligned}\tag{21}$$

于是(20)，(21)式就是我們討論的基本方程，可用同样的方法来討

論。这里增加了一个参数 μ，如果 $\mu=\frac{M}{M'}$ 非常小时，可令 $\mu=0$，相当于无限小的卫星。(20)，(21)式可以簡化，此时 Ω_1 仍然只有唯一的极大値。这里不再討論和計算了，如果要詳細了解可参看另外的书籍❶。

計算后得到 Ω_1 的极大値为

$$\Omega_1=0.0450347.$$

相当的 $u=0.2330$，$v=0.8909$，这应为很长的橢球体。这里的 Ω_1 极大値比上面得到的略小些，因此相应的距离限制条件更大些。与上面(12)式的求法一样，R，σ' 为行星 S 的半徑和密度，則距离 A 的限制条件为

$$A\geqslant 2.45539\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}R. \tag{22}$$

对于土星环的情形，由环的中心到土星質量中心的距离为土星赤道半徑的2.31倍，即相当于 $A=2.31R$。如土星和环的密度是一样，則已不滿足(22)式，故不能形成橢球体形状的卫星，分散成为环状。(22)式即为著名的駱煕极限。

对于質量較大的卫星，μ 不能为0，討論更复杂些，所得的結果很相近。如欲詳細了解，可参看达尔文的論文❷。下表系根据不同 μ 値所得的駱煕极限的系数[即相当于(22)式中的2.45539]。

μ	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
A	2.484	2.485	2.490	2.490	2.502	2.508	2.514

如卫星为剛体，根据捷弗里斯的研究，对卫星的半徑应有限

❶ Субботин 著: Курс небесной механики, Том. III, p. 207.

❷ Darwin: On the figure and stability of a liquid satellite, 載 Phylasophical Transaction of Royal Society, № 206, A.

制,半徑太大則不稳定。如卫星与行星的密度相同,則卫星半徑最大値与距离的 $\frac{3}{2}$ 次方成正比。

§5 不均匀流体的平衡形状問題,克雷諾的理論

上面都是討論的均匀流体,得到的結果只能近似地符合实际情況。关于不均匀流体,即密度不是常数,討論起来要复杂得多,因为不仅要考虑表面形状,还要討論各个等密度面(即水准面)的形状以及密度的分布。在这方面工作中,克雷諾第一次提出一套較完整的理論,以后經过很多人的发展,所得結果已相当完善,但整个理論很繁,不是簡短篇幅所能叙述,在这里只能讲他們的主要結果,很多公式不加推导,如果要詳細了解,可参看有关的参考书❶❷。

在克雷諾的理論中,假定不均匀流体的水准面(即等密度面)为旋轉椭球面;并設各水准面的密度 σ,椭率 α 都为到中心平均距离 r 的函数,即 $\sigma=\sigma(r)$, $\alpha=\alpha(r)$,以 r 为自变量。令

$$D=r^{-3}\int_0^r \sigma d(r^3), \tag{1}$$

这相当于以中心到 r 的一部分的平均密度,也是 r 的函数。对 r 求微商得

$$\frac{dD}{dr}=D'=-3r^{-1}D-3r^{-1}\sigma. \tag{2}$$

下面凡是对 r 的微商都用右上角加"$'$"表示。克雷諾根据水准面的基本方程得到椭率的微分方程为

$$\alpha''+\frac{6\sigma}{rD}\alpha'+\frac{2D'}{rD}\alpha=0, \tag{3}$$

---

❶ Tisserand 著: Traité de Mécanique Céleste, Tom. II, Chapts. XIII~XVII.

❷ Субботин 著: Курс небесной механики, Том. III, глав. VIII.

这就是大家熟悉的克雷諾方程.

克雷諾根据(3)式的討論,得到下面三个有名的定理。

定理 1 若自轉流体的密度函数 $\sigma(r)$ 为 r 的单調减小函数,則水准面椭率 $\alpha(r)$ 为 r 的单調增加函数。

証 利用(2)式消去(3)式中的 σ 得

$$rD\alpha''+(6D+2rD')\alpha'+2D'\alpha=0. \tag{4}$$

以 r^5D 乘(4)式后可得

$$\frac{d}{dr}(r^6D^2\alpha')=-2r^5DD'\alpha. \tag{5}$$

根据定理的假定知,σ 为 r 的单調减小函数,則得 $D'<0$;而 $D>0$, $\alpha>0$, 因此(5)式右端为正,卽函数 $r^6D^2\alpha'$ 为单調增加。而在 $r=0$ 时,$r^6D^2\alpha'=0$ (D, α' 都是有限量),因此 $r^6D^2\alpha'$ 恒为正,卽 $\alpha'>0$, 于是定理得証。

定理假定 $\sigma'<0$, 是符合天体实际情况的,由于压力作用,愈接近天体中心密度愈大,故定理的結論也是正确的。等密度面愈近中心,則愈接近于球形。

定理 2 若自轉流体的密度函数 $\sigma(r)$ 为 r 的单調减小函数,則 αr^{-3} 为 r 的单調减小函数。

証 以 r^5 乘(4)式得

$$r^6D\alpha''+6r^5D\alpha'+2r^6D'\alpha'+2r^5D'\alpha=0. \tag{6}$$

再由于

$$\frac{d}{dr}\left[r^6\frac{d(\alpha D)}{dr}\right]=r^6D\alpha''+6r^5D\alpha'+6r^5D'\alpha+2r^6D'\alpha'+r^6D''\alpha,$$

利用(6)式結果得

$$\frac{d}{dr}\left[r^6\frac{d(\alpha D)}{dr}\right]=r^5\alpha(4D'+rD''). \tag{7}$$

但从(2)式得

$$3\sigma=3D+rD',$$

因此 $$3\sigma'=3D'+D'+rD''=4D'+rD'',$$

代入(7)式得

$$\frac{d}{dr}\left[r^6\frac{d(\alpha D)}{dr}\right]=3r^5\alpha\sigma'. \tag{8}$$

根据定理假定有 $\sigma'<0$，而 $r^5\alpha$ 为正，故

$$\frac{d}{dr}\left[r^6\frac{d(\alpha D)}{dr}\right]<0.$$

但在 $r=0$ 时，

$$r^6\frac{d(\alpha D)}{dr}=0 \quad \left(\frac{d(\alpha D)}{dr}\text{不会为无穷大}\right),$$

因此应有

$$\frac{d(\alpha D)}{dr}<0,$$

即 $$\frac{d(\alpha D)}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{\alpha}{r^3}\right)\int_0^r\sigma d(r^3)+\frac{3\sigma\alpha}{r}<0.$$

可是上面积分及 $\frac{3\alpha\sigma}{r}$ 都是正值，因此得

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\alpha}{r^3}\right)=\frac{d}{dr}(\alpha r^{-3})<0,$$

这就証明了定理 2。

这两个定理說明了流体自轉平衡时，椭率由中心到表面的变化是随 r 增加的，但增加的速度比 r^3 慢。

克雷諾进一步研究，得到了表面椭率的界限，在这里就只提出而不証明了。

定理 3 流体自轉平衡时，表面的椭率 α_1 应满足下列条件：$\frac{1}{2}q_1\leqslant\alpha_1\leqslant\frac{5}{4}q_1$，其中 q_1 为 $\frac{3\omega^3}{4\pi GD_1}$，而 D_1 为整个流体的平均密度，并且当 $\alpha_1=\frac{q_1}{2}$ 时，流体为均匀密度。

§6 地球的形状和内部結构

自克雷諾提出他的关于不均匀流体自轉平衡时的理論后，地球和行星的形状和内部結构就引起很多人的注意；較有成績的为拉多（Radau）[1]以及卡朗德諾（Callandrau）[2]，他們把克雷諾方程作了相应的变换，得到了更好的結果，关于他們的工作在这里不能多談。

自20世紀以来，由于大地测量技术的发展，以及地球物理学的成就，有条件使理論工作更好地符合实际要求。

根据地震学的成就，可以得到地球内部密度分布的規律。再由大地測量和天文方法，可得地球表面形状和平均密度，就給了上面微分方程的初始条件，于是可以根据密度規律用数字积分法来解微分方程，得到地球内部各层水准面的密度和形状。这个工作在1948年由布拉尔德（Bullard）完成[3]，现将結果列于下一頁的表上。以地面向内部的深度为标准，$d=r_1-r$，其中 r_1 表示由地心到地面这个大地水准面的平均距离，r 为地心到所討論的那个水准面的平均距离。$d=0$ 卽为地面的数值，采用天文方法得到的椭率 $\alpha=\frac{1}{297.3}$，知道了密度和椭率在各层的数值，以及地球的自轉角速度后，就可以求出地球对外面一质点吸引的位函数以及表面重力的变化情况，这样的問題称为斯托克斯（Stokes）問題，对于其他天体也是一样。

根据表上所列数值，可以得出地面重力加速度 g 的变化情况。

---

[1] 参看：Radau: Surlaloi des densités à l'interieur dela Terre, 載 Bull, Astrou, Tom. 7, D. 67～92.

[2] 参看：Callandrau: Mémoirs sur la théorie dela fiqure des planètes, 載 Annales de l'observatoire de Paris (Memoirs), Tom. 19.

[3] 参看 Bullard: Figure of the earth, 載 Monthly Notice, Geophsical Supplement, 1948.

$$g = g_e(1 + 0.00529317\sin^2\varphi - 0.00000787\sin^2 2\varphi),$$

其中 g_e 表示赤道上的重力加速度，

$$g_e = 978.049\ 厘米/秒^2。$$

考虑地球自轉产生的离心加速度在内，φ 表示地理緯度，則在不同地点的地心距离 r 可表为

$$r = a(1 - 0.00336317\sin^2\varphi + 0.00000639\sin^2 2\varphi)$$

其中 a 为赤道半徑，长度等于 6378.245 公里。

这里的 a 和 g_e 都是采用的克拉索夫斯基 (Красовский) 的数值。

地球的形状和内部結构問題，有很大的实际应用的意义。目前的結果还不是最滿意，今后利用人造天体的成果，一定能得到更好的成績。

地球内部密度和橢率分布表

深度 $d=r_1-r$ 以公里为单位	密度 σ 克/厘米^3	平均密度 D 克/厘米^3	橢率 $\alpha\times10^6$
0	2.76	5.53	3364
33	2.76	5.57	3354
33	3.32	5.57	3354
100	3.38	5.64	3334
200	3.47	5.75	3305
300	3.55	5.87	3276
400	3.63	5.98	3248
413	3.64	6.00	3244
500	3.89	6.10	3220
600	4.13	6.21	3192
700	4.33	6.32	3165
800	4.49	6.42	3137
900	4.60	6.53	3109
1000	4.68	6.63	3081
1200	4.80	6.86	3023

(續上表)

深度 $d=r_1-r$ 以公里为单位	密度 σ 克/厘米^3	平均密度 D 克/厘米^3	椭率 $\alpha\times10^6$
1400	4.91	7.11	2963
1600	5.03	7.39	2903
1800	5.13	7.71	2842
2000	5.24	8.08	2782
2200	5.34	8.50	2723
2400	5.44	8.99	2607
2600	5.54	9.58	2618
2800	5.63	10.28	2580
2900	5.68	10.70	2567
2900	9.43	10.70	2567
3000	9.57	10.81	2556
3200	9.85	11.03	2532
3400	10.11	11.25	2503
3600	10.35	11.45	2480
3800	10.56	11.75	2450
4000	10.76	12.06	2414
4200	10.94	12.42	2372
4400	11.11	12.89	2322
4600	11.27	13.54	2265
4800	11.41	14.49	2203
4982	11.54	15.84	2155
5121	14.20	16.96	2141
5121	16.80	16.96	2141
5400	16.96	17.06	2138
5700	17.08	17.13	2135
6000	17.16	17.18	2133
6371	17.20	17.20	2132